

Liste d'exercices n°4

Applications

Exercice 1. Soit $f: x \mapsto x^2 + 3$ et soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Décrire les ensembles suivants :

1. $f([2; 5])$.
2. $f([-2; 5])$.
3. $f([a; b])$.

Exercice 2. Déterminer les images directes suivantes.

1. $\ln(\mathbb{R}_+^*)$
2. $\ln([1, e])$
3. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$
4. $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{15\pi}{2}, \frac{31\pi}{4}\right]\right)$

Exercice 3. Soit $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E de f .
2. Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, admet-elle des solutions ?
3. En déduire l'image de la fonction f .

Exercice 4. Soit E un ensemble non vide. Soient A et B deux parties de E . Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
2. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
4. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$
5. $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Dans ce dernier cas, donner l'expression de la fonction réciproque.

1.
$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$$
2.
$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$
3.
$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$
4.
$$\begin{array}{ccc} f: [0, 2] & \longrightarrow & [0, 2] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 3 - x & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases} \end{array}$$

Exercice 6. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |3x - 1| + 4 \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner une restriction bijective de f et déterminer sa réciproque.

Exercice 7. Considérons l'application suivante :

$$g: x \mapsto \frac{x+2}{x-1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition E de g .
2. Soit y un réel. Résoudre l'équation $g(x) = y$, d'inconnue $x \in E$.
3. En déduire que g réalise une bijection de E sur $g(E)$ et donner sa réciproque.

Exercice 8. Soit $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$.

1. Donner le domaine de définition E de f .
2. Montrer que f est bijective de E sur E et que $f^{-1} = f$.

Exercice 9. Soient les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, x+y, 2x+2y+z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x+z, y+z, x+3y+4z). \end{aligned}$$

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer tous les antécédents du triplet (a, b, c) par la fonction f .
2. La fonction f est-elle bijective ?
3. Reprendre les deux questions précédentes avec g .

Exercice 10. Soient les applications suivantes : $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par
$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n+1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Calculer $g \circ f$.
2. La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 11. Soit E un ensemble. Trouver toutes les applications $f: E \longrightarrow E$ telles que, pour toute application $g: E \longrightarrow E$, on ait $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 12. Soient $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

Exercice 13. Soit $f: E \longrightarrow F$ une application. Montrer l'équivalence :

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\text{pour toutes parties } A \text{ et } B \text{ de } E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)).$$

Exercice 14. Soit f une application de E dans F . Montrer l'équivalence :

$$(f \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (\text{pour tout ensemble } G \text{ et toutes applications } g, h: F \rightarrow G, g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.)$$

Exercice 15. Soient $f: E \longrightarrow F$, $g: F \longrightarrow G$ et $h: G \longrightarrow H$ trois applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 16. Soient $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow E$ trois applications.

Montrer que si parmi les trois applications $h \circ g \circ f, g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, deux sont surjectives et la troisième injective (ou deux sont injectives et la troisième surjective), alors les applications f, g et h sont bijectives.

Exercice 17. Soit $f : E \longrightarrow F$.

Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de $E, f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Exercice 18. Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. (a) Montrer que pour toute partie $A \subset F, f(f^{-1}(A)) = A \cap \text{Im}(f)$.
(b) Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall A \subset F, f(f^{-1}(A)) = A$.
2. (a) Montrer que pour toute partie $X \subset E, X \subset f^{-1}(f(X))$.
(b) Montrer que f est injective si et seulement si $\forall X \subset E, X = f^{-1}(f(X))$.

Exercice 19. Soit $f : E \longrightarrow F$.

On définit l'application

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(F) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto f^{-1}(A). \end{aligned}$$

(Attention : f^{-1} n'est pas la bijection réciproque de f !)

1. Montrer que f^{-1} est injective si et seulement si f est surjective.
2. Montrer que f^{-1} est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 20. Soient E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E .

On note $[A, A \cup B] = \{X \subset E | A \subset X \subset A \cup B\}$ et $[A \cap B, B] = \{Y \subset E | A \cap B \subset Y \subset B\}$.

On définit $f : [A, A \cup B] \longrightarrow [A \cap B, B]$ par $f(X) = X \cap B$.

On définit $g : [A \cap B, B] \longrightarrow [A, A \cup B]$ par $g(Y) = Y \cup A$.

Montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercice 21. Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 22. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout réel $x, g \circ f(x) = x^2$ et $f \circ g(x) = x^3$.

1. Montrer que f est surjective et g est injective.
2. Montrer que pour tout réel $x, g(x^3) = g(x)^2$ et $f(x^2) = f(x)^3$.
3. Montrer que $g(-1), g(0)$ et $g(1)$ sont tous trois solutions de l'équation $X^2 = X$. Conclure.

Exercice 23. Soit E un ensemble, soient A et B deux parties de E . On définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} .$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.