
DEVOIR MAISON N°2
À RENDRE POUR LE VENDREDI 2 OCTOBRE 2026

Exercice

Soient E et F deux ensembles non vides. On suppose que F contient au moins deux éléments. Soient A et B deux parties de E .

On rappelle que F^E désigne l'ensemble des applications de E vers F , F^A l'ensemble des applications de A vers F et F^B l'ensemble des applications de B vers F .

On considère l'application:

$$\Phi : \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^A \times F^B \\ f & \longmapsto & (f|_A, f|_B) \end{array}$$

où $f|_A$ et $f|_B$ désignent les restrictions de f à A et à B respectivement.

1. Montrer que Φ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que Φ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où Φ est bijective, préciser sa bijection réciproque Φ^{-1} .

Problème : Théorème de Cantor-Bernstein

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant :

▷ Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection entre E et F .

Partie I - Un résultat de point fixe

Soient E un ensemble et $h : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow h(A) \subset h(B).$$

On veut démontrer que h admet au moins un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $h(X) = X$.

On pose $H_1 = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid h(X) \subset X\}$ et $H_2 = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \subset h(X)\}$.

1. Montrer que H_1 et H_2 sont des ensembles non vides.
2. On pose $V = \bigcap_{X \in H_1} X$. Montrer que $h(V) = V$.
3. On pose $W = \bigcup_{X \in H_2} X$. Montrer que $h(W) = W$.
4. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $h(X) = X$. Montrer que $V \subset X \subset W$.

Autrement dit on a montré que h admet au moins un point fixe, et que V et W sont les minimum et maximum des points fixes de h , au sens de l'inclusion.

Partie II - Démonstration du théorème

Dans cette partie, on considère deux ensembles E et F .

On suppose qu'il existe une injection $f : E \rightarrow F$ et une injection $g : F \rightarrow E$.

1. On définit l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & g\left(\overline{f(X)}\right) \end{array}.$$

Montrer que h est une application croissante au sens de l'inclusion. En déduire que h admet un point fixe qu'on notera M .

2. Montrer que $g\left(\overline{f(M)}\right) = \overline{M}$.

En déduire que tout élément de $\overline{M}$ a un unique antécédent par g .

3. On définit l'application $\phi : E \rightarrow F$ par $\phi(x) = f(x)$ si $x \in M$, et $\phi(x)$ est l'unique antécédent de x par g si $x \in \overline{M}$.

Montrer que ϕ est une bijection de E dans F et conclure.

4. **Application:** Donner une injection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$, puis une injection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
En déduire qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$ (qu'on n'essaiera pas de définir).