
CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°1
Samedi 19 septembre 2026 (4h00)

Exercice 1: Calculs de sommes

1. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_0(n) = \sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n,$$

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- (b) **•Initialisation :** Pour $n = 1$, on a d'une part

$$S_5(1) + S_7(1) = \sum_{k=1}^1 k^5 + \sum_{k=1}^1 k^7 = 1 + 1 = 2$$

et d'autre part

$$2(S_1(1))^4 = 2 \left(\frac{1 \times 2}{2} \right)^4 = 2$$

donc $S_5(1) + S_7(1) = 2((S_1(1))^4)$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.

•Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $S_5(n) + S_7(n) = 2(S_1(n))^4$. Montrons

que $S_5(n+1) + S_7(n+1) = 2(S_1(n+1))^4$. On a

$$\begin{aligned}
S_5(n+1) + S_7(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^5 + \sum_{k=1}^{n+1} k^7 \\
&= S_5(n) + S_7(n) + (n+1)^5 + (n+1)^7 \\
&= 2(S_1(n))^4 + (n+1)^5 + (n+1)^7 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 2 \times \frac{n^4(n+1)^4}{16} + (n+1)^5 + (n+1)^7 \\
&= \frac{(n+1)^4}{8} (n^4 + 8(n+1) + 8(n+1)^3) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8} (n^4 + 8n + 8 + 8(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8} (n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16) \\
&= 2 \times \frac{(n+1)^4(n+2)^4}{16} \quad \text{car } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
&= 2(S_1(n+1))^4,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, S_5(n) + S_7(n) = 2(S_1(n))^4.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\boxed{(1-x)T_n + nx^{n+1}} &= (1-x) \sum_{k=1}^n kx^k + nx^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n (k(1-x)x^k) + nx^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n (kx^k - kx^{k+1}) + nx^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n (kx^k - (k+1)x^{k+1} + x^{k+1}) + nx^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n (kx^k - (k+1)x^{k+1}) + \sum_{k=1}^n x^{k+1} + nx^{n+1} \\
&= x - (n+1)x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} x^k + nx^{n+1} \quad (\text{télescopage et changement d'indice}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x^k - x^{n+1} \\
&= \boxed{\sum_{k=1}^n x^k}.
\end{aligned}$$

(b) • Si $x = 1$, on a $T_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Si $x \neq 1$, on a d'après la question précédente

$$(1-x)T_n + nx^{n+1} = \sum_{k=1}^n x^k = x \times \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\text{d'où } T_n = \frac{x}{1-x} \left(\frac{1-x^n}{1-x} - nx^n \right) = x \times \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Ainsi, } T_n = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } x = 1 \\ x \times \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

Exercice 2: Limites inférieure et supérieure d'une suite de parties

1. On a

$$x \in \liminf A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, x \in A_p.$$

Ceci signifie que x appartient à $\liminf A_n$ si et seulement si x appartient à tous les A_p à partir d'un certain rang n . De même,

$$x \in \limsup A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, x \in A_p.$$

Ceci signifie que x appartient à $\limsup A_n$ si et seulement si x appartient à A_n pour une infinité d'indices n .

2. (a) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcap_{p \geq n} \llbracket 0, p \rrbracket = \llbracket 0, n \rrbracket$ (puisque pour tout $p \geq n$, $\llbracket 0, n \rrbracket \subset \llbracket 0, p \rrbracket$) donc

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket = \mathbb{N}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcup_{p \geq n} \llbracket 0, p \rrbracket = \mathbb{N}$ donc

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

- (b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcap_{p \geq n} [p, +\infty[= \emptyset$ (car il n'existe pas de réel x tel que $x \geq p$ pour tout $p \geq n$) donc

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset = \emptyset.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcup_{p \geq n} [p, +\infty[= [n, +\infty[$ (car pour tout $p \geq n$, $[p, +\infty[\subset [n, +\infty[$) donc

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset.$$

(c) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcap_{p \geq n} \{(-1)^p\} = \emptyset$ donc

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset = \emptyset.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcup_{p \geq n} \{(-1)^p\} = \{-1, 1\}$ donc

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{-1, 1\} = \{-1, 1\}.$$

3. • Montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n$.

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$.

En particulier, pour $n = 0$, pour tout $p \geq 0$, $x \in A_p$ donc il existe bien un entier naturel n tel que pour tout $p \geq n$, $x \in A_p$, i.e. $x \in \liminf A_n$ d'après la première question.

On a donc bien montré l'inclusion $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n$.

• Montrons que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Soit $x \in \liminf A_n$, i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$, $x \in A_p$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \geq \max(n, n_0)$. On a $p \geq n$ par définition et puisque $p \geq n_0$, alors $x \in A_p$.

Ainsi, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p$, i.e. $x \in \limsup A_n$ d'après la première question.

On a donc bien montré l'inclusion $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

• Montrons que $\limsup A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Soit $x \in \limsup A_n$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p$.

En particulier, pour $n = 0$, il existe $p \geq 0$ tel que $x \in A_p$ donc $x \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p$.

On a donc bien montré l'inclusion $\limsup A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

• Finalement, on a bien prouvé les inclusions:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

4. (a) Raisonnons par double inclusion.

• Soit $x \in \liminf(A_n \cap B_n)$, i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$, $x \in A_p \cap B_p$.

En particulier, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$, $x \in A_p$ donc $x \in \liminf A_n$. On montre de même que $x \in \liminf B_n$ et il en découle que $x \in \liminf A_n \cap \liminf B_n$, ce qui prouve l'inclusion $\liminf(A_n \cap B_n) \subset \liminf A_n \cap \liminf B_n$.

• Réciproquement, soit $x \in \liminf A_n \cap \liminf B_n$. Il existe alors deux entiers $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $p \geq n_0, x \in A_p$ et pour tout $p \geq n_1, x \in B_p$.

Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $p \geq n_2, x \in A_p \cap B_p$ donc $x \in \liminf(A_n \cap B_n)$, ce qui prouve l'inclusion $\liminf A_n \cap \liminf B_n \subset \liminf(A_n \cap B_n)$.

On a donc bien prouvé l'égalité $\boxed{\liminf(A_n \cap B_n) = \liminf(A_n) \cap \liminf(B_n)}$.

(b) Raisonnons par double inclusion.

• Soit $x \in \limsup(A_n \cup B_n)$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p \cup B_p$.

Supposons par l'absurde que $x \notin \limsup A_n \cup \limsup B_n$, i.e. $x \notin \limsup A_n$ et $x \notin \limsup B_n$. Par définition, il existe donc $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $p \geq n_0, x \notin A_p$ et pour tout $p \geq n_1, x \notin B_p$.

Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $p \geq n_2, x \notin A_p \cup B_p$, ce qui contredit le fait que $x \in \limsup(A_n \cup B_n)$.

On en déduit que $x \in \limsup A_n \cup \limsup B_n$, ce qui prouve l'inclusion

$$\limsup(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \limsup B_n.$$

• Réciproquement, soit $x \in \limsup A_n \cup \limsup B_n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x \in \limsup A_n$ (la preuve est identique dans le cas où $x \in \limsup B_n$).

Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p \cup B_p$, ce qui prouve que $x \in \limsup(A_n \cup B_n)$.

On a donc bien montré l'inclusion $\limsup A_n \cup \limsup B_n \subset \limsup(A_n \cup B_n)$, d'où l'égalité $\boxed{\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n}$.

(c) Soit $x \in \limsup(A_n \cap B_n)$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p \cap B_p$.

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p$ donc $x \in \limsup A_n$ et on montre de même que $x \in \limsup B_n$, donc $x \in \limsup A_n \cap \limsup B_n$.

On a bien montré l'inclusion $\boxed{\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n}$.

(d) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = \{(-1)^n\}$ et $B_n = \{(-1)^{n+1}\}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \cap B_n = \emptyset$ donc $\limsup(A_n \cap B_n) = \emptyset$.

D'après la question 1.c, $\limsup A_n = \{-1, 1\}$ et on montre de même que $\limsup B_n = \{-1, 1\}$ donc $\limsup A_n \cap \limsup B_n = \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, on a donc $\boxed{\limsup(A_n \cap B_n) \neq \limsup A_n \cap \limsup B_n}$.

5. • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\bigcap_{p \geq n} A_p = A_n$.

En effet, si $x \in \bigcap_{p \geq n} A_p$, alors en particulier, pour $p = n$, on a $x \in A_n$ donc $\bigcap_{p \geq n} A_p \subset A_n$.

Réciproquement, puisque la suite est croissante, si $x \in A_n$, alors pour tout $p \geq n, A_n \subset A_p$, donc $x \in A_p$, ce qui prouve l'inclusion $A_n \subset \bigcap_{p \geq n} A_p$ et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}, \bigcap_{p \geq n} A_p = A_n$.

Ainsi, $\boxed{\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$.

• Montrons par double inclusion qu'on a également $\limsup A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

On sait d'après la question 3 qu'on a toujours $\limsup A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Réciproquement, soit $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_0}$ et puisque la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, ceci signifie que pour tout $p \geq n_0$, $x \in A_p$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $p = \max(n, n_0) \geq n$, puisque $p \geq n_0$, on a $x \in A_p$.

Ceci signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p$, i.e. $x \in \limsup A_n$.

On a donc bien montré l'inclusion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \limsup A_n$ et finalement l'égalité $\limsup A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Problème: Une construction du logarithme

Partie I: Etude de l'ensemble A_x

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé arbitrairement.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

•**Initialisation:** Pour $n = 0$, on a $1 + 0 \times x = 1 \leq 1 = (1+x)^0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

En multipliant l'inégalité supposée par hypothèse de récurrence par $1+x > 0$, on obtient

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$, et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ choisi arbitrairement, on peut conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. Puisque $a > 1$, on a $a-1 > 0$. La question précédente permet alors d'affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^n = (1+(a-1))^n \geq 1+n(a-1).$$

Puisque $a-1 > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+n(a-1) = +\infty$, et on en déduit par comparaison que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty.$$

3. (a) Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non vide. Puisque A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée (par 0), on en déduit que A admet une borne inférieure.

Montrons que $\inf(A) \in A$. Pour cela, supposons par l'absurde que $\inf(A) \notin A$.

Par caractérisation de la borne inférieure, il existe $x \in A$ tel que

$$\inf(A) < x < \inf(A) + 1$$

(on a nécessairement $\inf(A) < x$ puisque $\inf(A) \notin A$).

De même, puisque $\inf(A) < x$ et que $\inf(A)$ est le plus grand minorant de A , il existe $y \in A$ tel que

$$\inf(A) < y < x < \inf(A) + 1.$$

Puisque x et y sont des éléments de A , x et y sont des entiers donc $x - y$ est un entier tel que $0 < x - y < 1$, ce qui est absurde.

Ainsi, on a nécessairement $\inf(A) \in A$, ce qui prouve que A admet un plus petit élément.

(b) Soit $x \geq 1$. Posons $B_x = \{k \in \mathbb{N}, a^k > x\} \subset \mathbb{N}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$, il existe nécessairement un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k > x$.

Ainsi, B_x est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. D'après la question précédente, la partie B_x admet un minimum.

Puisque $x \geq 1$, on a $a^0 = 1 \leq x$ donc $0 \notin B_x$. Nécessairement, $\min(B_x) \in \mathbb{N}^*$.

Posons alors $n = \min(B_x) - 1 \in \mathbb{N}$. Puisque $n < \min(B_x)$, on a $n \notin B_x$ donc $a^n \leq x$ et puisque $n + 1 = \min(B_x) \in B_x$, on a $a^{n+1} > x$.

On a donc bien prouvé l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leq x < a^{n+1}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $x \geq 1$, d'après la question précédente, on dispose d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leq x < a^{n+1}$.

- Si $0 < x < 1$, on a $\frac{1}{x} > 1$ donc d'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leq \frac{1}{x} < a^{n+1}$ et par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $a^{-n-1} < x \leq a^{-n}$.

Si $x < a^{-n}$, on pose $p = -n - 1 \in \mathbb{Z}$ et on a alors $a^p \leq x < a^{p+1}$.

Si $x = a^{-n}$, on pose $p = -n \in \mathbb{Z}$ et on a alors $a^p \leq x < a^{p+1}$.

Le résultat étant vrai dans tous les cas, on a bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{Z}, a^p \leq x < a^{p+1}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Puisque A_x est une partie de $\mathbb{R}$, pour montrer que A_x admet une borne supérieure, il faut montrer que A_x est non vide et majorée.

- D'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a^p \leq x^1 < a^{p+1}$.

Par définition, on a alors $\frac{p}{1} = p \in A_x$ donc A_x est non vide.

- Soient $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{m}{n} \in A_x$. Par définition, on a $a^m \leq x^n$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $x < a^{p+1}$, on a $x^n < a^{n(p+1)}$ donc $a^m \leq x^n < a^{n(p+1)}$.

Puisque $a > 1$, ceci implique que $m < n(p+1)$.

Ainsi, on a $\frac{m}{n} < p+1$, ce qui prouve que A_x est majorée par $p+1$.

On en conclut que A_x est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, ce qui permet d'affirmer que A_x possède une borne supérieure.

Partie II: Analyse: Unicité de la fonction solution

5. D'après l'équation vérifiée par f appliquée à $x = y = 1$, on a

$$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

donc $f(1) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = nf(x)$.

• **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $f(x^0) = f(1) = 0 = 0 \times f(x)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Supposons que $f(x^n) = nf(x)$ et montrons que $f(x^{n+1}) = (n+1)f(x)$.

On a

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) &= f(x^n \times x) \\ &= f(x^n) + f(x) \quad \text{par propriété de } f \\ &= nf(x) + f(x) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)f(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Puisque le réel strictement positif x a été choisi arbitrairement, on a donc montré par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = nf(x)$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. Si $p \in \mathbb{N}$, on vient de montrer que $f(x^p) = pf(x)$.

Supposons que $p < 0$. On a alors $-p \in \mathbb{N}$. D'après la propriété montrée par récurrence appliquée à $\frac{1}{x}$ et à $-p$, on a

$$f(x^p) = f\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-p}\right) = -pf\left(\frac{1}{x}\right) = pf(x)$$

en utilisant le résultat de la question précédente.

On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(x^p) = pf(x)$.

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $m = \lfloor nf(x) \rfloor \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a $m \leq nf(x) < m+1$ d'où $\frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

Vérifions que $\frac{m}{n} \in A_x$, i.e. $a^m \leq x^n$.

Puisque $f(a) = 1$, on a d'après la question précédente

$$f(a^m) = mf(a) = m \leq nf(x) = f(x^n)$$

et par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci implique que $a^m \leq x^n$, et il en découle que $\frac{m}{n} \in A_x$.

On a donc bien montré l'existence d'un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\boxed{\frac{m}{n} \in A_x \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.}$$

8. • Soit $r \in A_x$. Il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{m}{n} = r \in A_x$. Alors $a^m \leq x^n$ et par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci implique que $f(a^{\frac{m}{n}}) \leq f(x^n)$, d'où $mf(a) = m \leq nf(x)$ puis $\frac{m}{n} \leq f(x)$.

Ainsi, $\forall r \in A_x, r \leq f(x)$.

- Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (il suffit de prendre $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$).

D'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{m}{n} \in A_x$ et tel que

$$f(x) - \varepsilon < f(x) - \frac{1}{n} < \frac{m}{n} \leq f(x).$$

Finalement, on a montré que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in A_x, r \leq f(x) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists r \in A_x, f(x) - \varepsilon < r \leq f(x). \end{array} \right.$$

Par caractérisation de la borne supérieure, ceci signifie que $\boxed{f(x) = \sup(A_x)}$.

Partie III: Synthèse: Construction de la fonction solution

9. Par définition, $A_a = \{\frac{m}{n} | (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, a^m \leq a^n\}$.

Puisque $a > 1$, on a $a^m \leq a^n \Leftrightarrow a^{m-n} \leq 1 \Leftrightarrow m - n \leq 0 \Leftrightarrow m \leq n \Leftrightarrow \frac{m}{n} \leq 1$.

Ainsi, $A_a = \{\frac{m}{n} | (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, m \leq n\}$ donc $\boxed{A_a = \mathbb{Q} \cap]-\infty, 1]}$.

On en déduit que $\boxed{f(a) = \sup(A_a) = 1}$.

10. Soit $x > 1$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^1 \leq x^n$.

Par définition, on a alors $\frac{1}{n} \in A_x$.

Ainsi, $f(x) = \sup(A_x) \geq \frac{1}{n} > 0$ donc $\boxed{f(x) > 0}$.

11. En appliquant la question 3.c à $x^n > 0$, on trouve l'existence d'un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a^m \leq x^n < a^{m+1}$, ce qui assure en particulier que $\frac{m}{n} \in A_x$ et $\frac{m}{n} + \frac{1}{n} \notin A_x$ donc $\frac{m}{n} \leq f(x) = \sup(A_x) \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ (la deuxième inégalité étant vérifiée car pour tout $r \in A_x, a^r \leq x < a^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n}}$ donc pour tout $r \in A_x, r \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$, ce qui prouve que $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ est un majorant de A_x , donc nécessairement supérieur à $f(x) = \sup(A_x)$).

De même, il existe $m' \in \mathbb{Z}$ tel que $a^{m'} \leq y^n < a^{m'+1}$, d'où $\frac{m'}{n} \in A_y$ et $\frac{m'}{n} \leq f(y) \leq \frac{m'}{n} + \frac{1}{n}$.

En multipliant les inégalités, on trouve $a^{m+m'} \leq (xy)^n < a^{m+m'+2}$ donc avec le même raisonnement, on en déduit que $\frac{m}{n} + \frac{m'}{n} \leq f(xy) \leq \frac{m}{n} + \frac{m'}{n} + \frac{2}{n}$.

En additionnant les inégalités sur $f(x)$, $f(y)$ et $f(y)$, on trouve

$$-\frac{2}{n} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n} - \frac{m}{n} - \frac{1}{n} - \frac{m'}{n} - \frac{1}{n} \leq f(xy) - f(x) - f(y) \leq \frac{m}{n} + \frac{m'}{n} + \frac{2}{n} - \frac{m}{n} - \frac{m'}{n} = \frac{2}{n}$$

d'où $\boxed{|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{n}}.$

12. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq |f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{n}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $|f(xy) - f(x) - f(y)| = 0$, i.e.

$$\boxed{\text{pour tout } (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y).}$$

13. Grâce à l'équation trouvée en question précédente, on montre comme en question 5 que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, avec $x < y$, on a

$$f(y) - f(x) = f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(y \times \frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Or, $\frac{y}{x} > 1$ donc d'après la question 10, on a $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$ d'où $f(y) - f(x) > 0$, i.e. $f(x) < f(y)$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}.$

14. On a montré dans la partie Analyse que, s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(a) = 1$ et telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, alors f est nécessairement définie par $f(x) = \sup(A_x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans la partie Synthèse, on a vérifié que cette dernière fonction était strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiait $f(a) = 1$ et pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

On en conclut qu'il existe une unique fonction vérifiant ces propriétés et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sup(A_x)$.