
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°1
Samedi 19 septembre 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, d'un problème et comporte 4 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1: Calculs de sommes

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$.

(a) Rappeler sans démonstration les valeurs de $S_0(n), S_1(n), S_2(n), S_3(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer par récurrence que:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_5(n) + S_7(n) = 2(S_1(n))^4.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{k=1}^n kx^k$.

(a) Montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, (1-x)T_n + nx^{n+1} = \sum_{k=1}^n x^k.$$

(b) En déduire la valeur de T_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2: Limites inférieure et supérieure d'une suite de parties

On considère un ensemble E non vide et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E .

On définit la *limite supérieure* et la *limite inférieure* de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{p \geq n} A_p \right) \quad \text{et} \quad \limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{p \geq n} A_p \right).$$

1. Soit x un élément de E .

Traduire à l'aide des quantificateurs universel et existentiel la propriété $x \in \liminf A_n$ puis expliquer par une phrase en français ce que cette propriété signifie.

Faire de même pour $x \in \limsup A_n$.

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $E = \mathbb{R}$. Pour les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les ensembles $\bigcap_{p \geq n} A_p, \bigcup_{p \geq n} A_p$ puis les ensembles $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = \llbracket 0, n \rrbracket$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = [n; +\infty[$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = \{(-1)^n\}$.

3. Montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

4. On considère une autre suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E .

- (a) Montrer que $\liminf(A_n \cap B_n) = (\liminf A_n) \cap (\liminf B_n)$.
 - (b) Montrer que $\limsup(A_n \cup B_n) = (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$.
 - (c) Montrer que $\limsup(A_n \cap B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$.
 - (d) A-t-on toujours $\limsup(A_n \cap B_n) = (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$?
5. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties croissante pour l'inclusion, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

Problème: Une construction du logarithme

Dans tout le problème, on fixe un réel $a > 1$.

L'objectif de ce problème est de proposer une construction de la fonction logarithme en base a , i.e. de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes:

- 1. $f(a) = 1$;
- 2. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;
- 3. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y)$.

On s'interdira donc tout recours aux fonctions exponentielle ou logarithme népérien, que nous n'avons pas encore définies. En revanche, on pourra bien sûr utiliser la propriété de la borne supérieure et toutes celles en découlant, ainsi que les propriétés élémentaires des suites réelles ou des puissances rationnelles d'un nombre réel positif.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on introduit le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ suivant:

$$A_x = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, a^m \leq x^n \right\}.$$

Partie I: Etude de l'ensemble A_x

- 1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$
- 2. En déduire que la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- 3. (a) Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
 (b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leq x < a^{n+1}$.
Indication : Considérer l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, a^k > x\}$.
 (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a^p \leq x < a^{p+1}$.
- 4. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble A_x possède une borne supérieure.

Partie II: Analyse: Unicité de la fonction solution

On suppose dans toute cette partie qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(a) = 1$ et telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(x^p) = pf(x)$.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{m}{n} \in A_x \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

8. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sup(A_x)$.

Partie III: Synthèse: Construction de la fonction solution

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sup(A_x)$.

Le but de cette partie est de montrer que la fonction f ainsi définie vérifie les propriétés énoncées dans le préambule.

9. Déterminer A_a et en déduire la valeur de $f(a)$.
10. Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x) > 0$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{n}.$$

Indication: On pourra considérer $(m, m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\frac{m}{n} \in A_x$ et $\frac{m'}{n} \in A_y$.

12. En déduire que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
13. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
14. Conclure.