

Liste d'exercices n°5

Dénombrement

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs $\text{card}(E) = n+1$ et $\text{card}(F) = n$.

Dénombrer les surjections de E vers F .

Exercice 2. On prélève cinq cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?

Parmi ces mains de cinq cartes, combien contiennent :

- | | |
|-----------------------------|---|
| 2. le roi de cœur ? | 8. un full (un brelan et une paire) ? |
| 3. exactement deux cœurs ? | 9. un carré ? |
| 4. exactement deux dames ? | 10. cinq cartes de hauteurs distinctes ? |
| 5. au moins un roi ? | 11. une quinte flush (cinq cartes de même couleur et de hauteurs successives) ? |
| 6. exactement deux paires ? | |
| 7. un brelan ? | |

Exercice 3. On désire former un jury composé de 2 scientifiques et 3 littéraires. On peut choisir les membres du jury parmi 5 scientifiques et 7 littéraires.

De combien de façons peut-on constituer le jury dans les cas suivants :

1. N'importe quel scientifique et n'importe quel littéraire peut être choisi.
2. L'un des littéraires doit obligatoirement faire partie du jury.
3. Deux des scientifiques ne s'entendent pas et ne veulent pas faire partie du même jury.
4. Même question si ce sont deux littéraires qui ne s'entendent pas.

Exercice 4. On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

1. On suppose que les dix billes sont de couleurs différentes.
De combien de façons peut-on les ranger ?
2. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.
 - (a) De combien de façons peut-on les ranger ?
 - (b) De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleur ?
 - (c) Même question mais seules les rouges doivent être groupées.

Exercice 5. On dispose de quatre petits paniers de couleurs différentes et de douze œufs tous décorés différemment. On répartit ces œufs dans les paniers, chaque panier pouvant contenir un nombre quelconque d'œufs (zéro, par exemple).

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles de ces œufs dans les paniers ?
2. Combien y a-t-il de répartitions possibles des œufs dans les paniers de telle façon que :
 - (a) chaque panier contienne trois œufs ?
 - (b) l'un des paniers contienne un œuf, un autre deux, un autre trois et un autre six ?
 - (c) deux paniers contiennent trois œufs, un autre quatre œufs et un autre deux œufs ?
 - (d) deux paniers contiennent cinq œufs, les autres en contenant un nombre quelconque ?
3. On repeint maintenant tous les œufs en orange.
Combien y a-t-il alors de répartitions possibles des œufs dans les paniers ?

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Montrer que la suite $\left(\binom{n}{k} \right)_{0 \leq k \leq m}$ est strictement croissante et que la suite $\left(\binom{n}{k} \right)_{m \leq k \leq n}$ est décroissante.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}; & 3. \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} 2^k \binom{n}{k}; & 5. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}; \\ 2. \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^k \binom{n}{k}; & 4. \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}; & 6. \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}. \end{array}$$

Exercice 8. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

1.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

2.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}.$$

Exercice 9. Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Prouver que

$$\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Exercice 10. Soient n, p deux entiers naturels avec $0 \leq p \leq n$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{j}{k}$.

Exercice 12. Soient n, p, q, r, s des entiers naturels avec $p \leq r, q \leq s, n \leq r + s$. Montrer que

$$\sum_{p+q=n} \binom{r}{p} \binom{s}{q} = \binom{r+s}{n}.$$

(Indication : on pourra remarquer que le coefficient devant x^n dans $(1+x)^{r+s}$ est $\binom{r+s}{n}$.)

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 13. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

est bijective.

Exercice 14. Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble à n éléments.

1. Quel est le nombre de couples (A, B) de parties de E ?
2. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E disjointes ?
3. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cap B$ soit un singleton ?

Exercice 15. Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble de cardinal n . Soit k un entier naturel.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k -uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k -uplets d'éléments de E deux à deux distincts de E ?
Supposons de plus que E soit un ensemble de nombres réels (que l'on peut donc ordonner).
4. Combien y-a-t-il de k -uplets d'éléments de E deux à deux distincts, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k -uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?