

Corrigé de la liste d'exercices n°4

Applications

Exercice 1.

1. Puisque f est continue et croissante sur $[2, 5]$, on a $f([2, 5]) = [f(2), f(5)] = [7, 28]$.
2. On a $f([-2, 5]) = f([-2, 0] \cup [0, 5]) = f([-2, 0]) \cup f([0, 5])$.
Puisque f est continue et décroissante sur $[-2, 0]$, alors $f([-2, 0]) = [f(0), f(-2)] = [3, 7]$.
Puisque f est continue et croissante sur $[0, 5]$, alors $f([0, 5]) = [f(0), f(5)] = [3, 28]$.
Ainsi, $f([-2, 5]) = [3, 7] \cup [3, 28] = [3, 28]$.
3. • Si $a \leq b \leq 0$, puisque f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}_-$, alors f est décroissante et continue sur $[a, b]$ donc

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)] = [b^2 + 3, a^2 + 3].$$

- Si $0 \leq a \leq b$, puisque f est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, alors f est croissante et continue sur $[a, b]$ donc

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [a^2 + 3, b^2 + 3].$$

- Si $a \leq 0 \leq b$, alors $f([a, b]) = f([a, 0]) \cup f([0, b])$.

Puisque f est décroissante et continue sur $[a, 0]$, alors $f([a, 0]) = [f(0), f(a)] = [3, a^2 + 3]$.

Puisque f est croissante et continue sur $[0, b]$, alors $f([0, b]) = [f(0), f(b)] = [3, b^2 + 3]$.

Ainsi, $f([a, b]) = [3, a^2 + 3] \cup [3, b^2 + 3] = [3, \max(a^2 + 3, b^2 + 3)]$.

- Si $|a| \leq |b|$, alors $a^2 \leq b^2$ donc $f([a, b]) = [3, b^2 + 3]$.

- Si $|a| \geq |b|$, alors $a^2 \geq b^2$ donc $f([a, b]) = [3, a^2 + 3]$.

Exercice 2.

1. $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
2. $\ln([1, e]) = [0, 1]$.
3. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
- 4.

$$\begin{aligned} \tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{15\pi}{2}, \frac{31\pi}{4}\right]\right) &= \tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \cup \tan\left(\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) \\ &=]-1, +\infty[\cup]-\infty, -1[\\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 3x + 3 \geq 0$.
Ce trinôme du second degré a un discriminant égal à $\Delta = -3 < 0$ donc il est toujours du signe du coefficient dominant, c'est à dire strictement positif. Ainsi, pour tout réel x , $x^2 - 3x + 3 \geq 0$, ce qui montre que la fonction f est définie sur $E = \mathbb{R}$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3} = \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par ailleurs, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R})$ est un intervalle donc $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$.

Exercice 4.

1. Soit $x \in E$.

On a $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \bar{A} \\ 0 & \text{si } x \notin \bar{A} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases} = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

2. Soit $x \in E$.

On a $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap B \\ 0 & \text{si } x \in \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$.

3. $\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A \cup B}} = 1 - \mathbb{1}_{\bar{A} \cap \bar{B}} = 1 - \mathbb{1}_{\bar{A}}\mathbb{1}_{\bar{B}} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

4. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_{\emptyset} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

5. On a $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$. Puisque cette union est disjointe, on a d'après la question précédente

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_{A \cap \bar{B}} + \mathbb{1}_{B \cap \bar{A}} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\bar{B}} + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_{\bar{A}} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B(1 - \mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$$

D'autre part, $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A^2 + \mathbb{1}_B^2 - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$ puisque $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

Exercice 5.

1. La fonction f est bijective de réciproque
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2}. \end{array}$$

2. La fonction f est surjective mais n'est pas injective.

3. La fonction f n'est ni injective ni surjective ($\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$).

4. Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = x \in [0, 1[$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $f(x) = 3 - x \in [1, 2]$.

Soit $y \in [0, 2]$.

• Si $y \in [0, 1[$, alors $f(x) = y \Leftrightarrow x = y$.

• Si $y \in [1, 2]$, on a $f(x) = y \Leftrightarrow 3 - x = y \Leftrightarrow x = 3 - y$.

Finalement, $\forall y \in [0, 2]$, $\exists! x \in [0, 2]$, $f(x) = y$ et on a pour tout $y \in [0, 2]$,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in [0, 1[\\ 3 - y & \text{si } y \in [1, 2] \end{cases} = f(y)$$

donc f est bijective et $f^{-1} = f$.

Exercice 6.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x + 3 & \text{si } x \geq \frac{1}{3} \\ 5 - 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$.

L'application f n'est pas surjective car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 4$. Elle n'est pas non plus injective car $f(1) = f(-\frac{1}{3}) = 6$.

2. L'application f est strictement décroissante sur $[-\infty, \frac{1}{3}]$ à valeurs dans $[4, +\infty[$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$ à valeurs dans $[4, +\infty[$.

Ainsi, f est bijective de $[\frac{1}{3}, +\infty[$ sur $[4, +\infty[$.

Exercice 7.

1. $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $y = g(x) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} = y \Leftrightarrow x+2 = y(x-1) \Leftrightarrow x(y-1) = y+2$.
 - Si $y = 1$, ceci équivaut à $0 = 3$, ce qui est absurde donc 1 n'admet pas d'antécédent par g .
 - Si $y \neq 1$, ceci équivaut à $x = \frac{y+2}{y-1}$.
3. On a $g(E) = E$ et pour tout $y \in E$, y admet un unique antécédent x par g qui est $g(y)$, ce qui prouve que g est bijective de E sur $g(E)$.
Ainsi, pour tout $y \in g(E) = E$, $g(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$ ce qui prouve que $g^{-1} = g$.

Exercice 8. Soit $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$.

1. $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons les solutions $x \in E$ de l'équation $f(x) = y$. On a

$$\frac{2x+1}{x-2} = y \Leftrightarrow 2x+1 = (x-2)y \Leftrightarrow 2x+1 = xy-2y \Leftrightarrow x(2-y) = -1-2y.$$

- Si $y = 2$, ceci équivaut à $0 = -3$, ce qui est absurde. Donc l'équation $f(x) = y$ n'admet pas de solution pour $y = 2$.
- On suppose dorénavant que $y \neq 2$. On a alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{-1-2y}{2-y} = \frac{2y+1}{y-2} = f(y).$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = f(y)$. Ceci implique que f est bijective sur E et vérifie $f^{-1} = f$.

Exercice 9.

1. On a $f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ x+y &= b \\ 2x+2y+z &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ y &= b-a \\ z &= c-2b \end{cases}$
2. Tout élément $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent par f qui est $(a, b-a, c-2b)$ donc f est bijective de bijection réciproque $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(a, b, c) \mapsto (a, b-a, c-2b)$.
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{On a } g(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} x+z &= a \\ y+z &= b \\ x+3y+4z &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a-z \\ y &= b-z \\ a+3b &= c \end{cases}$$

- Si $a+3b \neq c$, alors (a, b, c) n'admet pas d'antécédent par f , donc f n'est pas surjective.
- Si $a+3b = c$, alors pour tout réel z , $(a-z, b-z, z)$ est un antécédent de (a, b, c) , donc dans ce cas, (a, b, c) admet une infinité d'antécédents, ce qui prouve que f n'est pas injective.

Ainsi, f n'est pas bijective.

Exercice 10.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = g(n+1)$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \neq 0$ donc $g(n+1) = n+1-1 = n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
2. Cependant, f n'est pas bijective puisque $\text{Im}(f) = \mathbb{N}^*$ donc f n'est pas surjective.

Exercice 11. Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse :** Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que pour toute application $g : E \longrightarrow E$, on ait $g \circ f = f \circ g$.

Soit $a \in E$. Considérons l'application $g : E \longrightarrow E$ constante égale à a .

L'hypothèse $g \circ f = f \circ g$ entraîne pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = f \circ g(x) \Leftrightarrow a = f(a)$. Ceci étant vrai pour tout élément $a \in E$, on a nécessairement $f = \text{Id}_E$.

• **Synthèse :** Soit $f = \text{Id}_E$. Alors pour toute application $g : E \longrightarrow E$, on a

$$g \circ f = g \circ \text{Id}_E = g = \text{Id}_E \circ g = f \circ g.$$

Finalement, la seule application f qui commute avec toutes les applications $g : E \longrightarrow E$ est $f = \text{Id}_E$.

Exercice 12.

1. • **Première méthode :** Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. Or, par hypothèse, g est injective donc g est bijective.

Soit $g^{-1} : G \longrightarrow F$ la bijection réciproque de g . Alors $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ est surjective comme composée d'applications surjectives.

• **Deuxième méthode :** Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$.

Puisque $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

Puisque g est injective, $g(y) = g(f(x))$ implique que $y = f(x)$, d'où $y \in \text{Im}(f)$.

Ainsi, tout élément y de F admet un antécédent par f , ce qui prouve que f est surjective.

2. • **Première méthode :** Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Or, par hypothèse, f est surjective, donc f est bijective.

Soit $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque de f . Alors $(g \circ f) \circ f^{-1} = g$ est injective comme composée d'applications injectives.

• **Deuxième méthode :** Soit $(y, y') \in F^2$ tels que $g(y) = g(y')$. Puisque $f : E \longrightarrow F$ est surjective, il existe $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$.

Ainsi, $g(y) = g(y') \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

Or, $g \circ f$ est injective donc $g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$, i.e. $y = y'$.

Ainsi, $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$, ce qui prouve que g est injective.

Exercice 13. • Supposons que f est injective. Soient A et B des parties de E .

On a vu en cours que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Montrons l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x \in A$ et $x' \in B$ tels que $f(x) = f(x') = y$. Puisque f est injective, on a nécessairement $x = x'$ donc $x \in A \cap B$. Ainsi, $y = f(x) \in f(A \cap B)$, ce qui prouve que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Finalement, on a bien $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, et ce pour toutes parties A et B de E .

• Supposons que pour toutes parties A et B de E , $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Montrons que f est injective. Pour cela, considérons deux éléments $(x, x') \in E^2$ tels que $x \neq x'$ et montrons que $f(x) \neq f(x')$.

Soit $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. On a $A \cap B = \emptyset$ puisque $x \neq x'$, donc $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Or, par hypothèse, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$ donc $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \emptyset$, ce qui prouve que $f(x) \neq f(x')$.

On en conclut que f est injective.

Exercice 14. • Supposons que f est surjective.

Soit G un ensemble, et soient $g : F \longrightarrow G$ et $h : F \longrightarrow G$ deux applications telles que $g \circ f = h \circ f$.

Montrons que $g = h$.

Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Puisque $g \circ f = h \circ f$, on a alors

$$g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$$

et ce pour tout $y \in F$ donc $g = h$.

• Réciproquement, supposons que pour tout ensemble G et toutes applications $g, h : F \rightarrow G$, $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

Montrons par l'absurde que f est surjective. On suppose pour cela que f n'est pas surjective. Ceci implique qu'il existe un élément $y_0 \in F$ tel que $y_0 \notin f(E)$.

Posons $G = \{0, 1\}$. Considérons $g : F \rightarrow G$ l'application constante égale à 1 et h l'application définie par

$$\begin{aligned} h : F &\rightarrow G \\ y &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = y_0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrons que $g \circ f = h \circ f$.

Soit $x \in E$. Par définition de g , on a $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1$.

Par ailleurs, puisque $f(x) \in f(E)$, on a $f(x) \neq y_0$ donc par définition de h , il vient $h \circ f(x) = h(f(x)) = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = h \circ f(x)$, ce qui implique que $g \circ f = h \circ f$. D'après l'hypothèse, ceci implique que $g = h$ donc h est l'application constante égale à 1! C'est absurde.

Nécessairement, f est surjective, ce qui prouve la deuxième implication, et donc l'équivalence.

Exercice 15. Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications.

Supposons que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

Puisque $g \circ f$ est bijective, $g \circ f$ est surjective, donc g est surjective.

Puisque $h \circ g$ est bijective, $h \circ g$ est injective, donc g est injective.

Ainsi, g est surjective et injective, donc bijective. On peut donc considérer $g^{-1} : G \rightarrow F$.

On a alors $g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = \text{Id}_F \circ f = f$.

Or, g^{-1} et $g \circ f$ sont bijectives, donc par composition $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ est bijective.

De même, on a $h \circ g \circ g^{-1} = h \circ \text{Id}_G = h$ qui est bijective comme composée d'applications bijectives.

On peut donc en conclure que f, g et h sont bijectives.

Exercice 16. Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow E$ trois applications.

Supposons que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont surjectives, tandis que $f \circ h \circ g$ est injective (les autres cas se traitent de manière analogue).

Puisque $g \circ (f \circ h)$ est surjective, on en déduit que g est surjective. De même, puisque $(f \circ h) \circ g$ est injective, on en déduit que g est injective.

Ainsi, g est bijective. Il existe donc $g^{-1} : G \rightarrow F$.

Puisque $h \circ (g \circ f)$ est surjective, on en déduit que h est surjective.

Par ailleurs, par composition d'applications injectives, on déduit que $(f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est injective. Or,

$$(f \circ h \circ g) \circ g^{-1} = f \circ h \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ h \circ \text{Id}_G = f \circ h.$$

Ainsi, $f \circ h$ est injective, ce qui implique que h est injective.

Puisque h est injective et surjective, on en déduit que h est bijective et il existe donc $h^{-1} : E \rightarrow G$.

Enfin, par composition d'applications surjectives, on a $g^{-1} \circ h^{-1} \circ (h \circ g \circ f) = f$ est surjective et par composition d'applications injectives, $(f \circ h \circ g) \circ g^{-1} \circ h^{-1} = f$ est injective, donc f est bijective.

On peut donc conclure que f, g et h sont bijectives.

Exercice 17. • Supposons que f est bijective. Soit $A \subset E$. Montrons que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
Puisque f est surjective, alors $f(E) = F$. Donc

$$f(A) \cup f(\overline{A}) = f(A \cup \overline{A}) = f(E) = F.$$

D'autre part, soit $y \in f(A) \cap f(\overline{A})$. Alors il existe $x \in A$ et $x' \in \overline{A}$ tel que $f(x) = f(x') = y$. Or, f est injective donc $x = x'$, ce qui entraîne que $x \in A \cap \overline{A} = \emptyset$, ce qui est absurde.

On a donc $f(A) \cap f(\overline{A}) = \emptyset$. L'union $f(A) \sqcup f(\overline{A}) = F$ est donc disjointe, ce qui prouve que $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$, et ce pour toute partie $A \subset E$.

• Supposons que pour toute partie $A \subset E$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

En particulier, pour $A = \emptyset$, on trouve $f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} \Leftrightarrow f(E) = \overline{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F$, ce qui prouve que f est surjective.

Montrons maintenant que f est injective. Soit $x \in E$. Pour $A = \{x\}$, l'hypothèse entraîne que $f(E \setminus \{x\}) = F \setminus \{f(x)\}$. Ainsi, si $x' \neq x$, alors $x' \in E \setminus \{x\}$, donc $f(x') \in f(E \setminus \{x\}) = F \setminus \{f(x)\}$, d'où $f(x') \neq f(x)$, ce qui prouve que f est injective.

L'application f est donc bijective.

Exercice 18.

1. (a) Soit $A \subset F$. Soit $y \in F$. On a les équivalences suivantes :

$$y \in f(f^{-1}(A)) \Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(A), f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in E, f(x) = y \text{ et } y = f(x) \in A \Leftrightarrow y \in A \cap \text{Im}(f)$$

$$\text{donc } \boxed{\forall A \subset F, f(f^{-1}(A)) = A \cap \text{Im}(f).}$$

- (b) On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \Leftrightarrow \forall A \subset F, A \cap \text{Im}(f) = A.$$

(En effet, l'implication de la gauche vers la droite est triviale. Pour celle de la droite vers la gauche, si pour toute partie $A \subset F$, $A \cap \text{Im}(f) = A$, ceci est vrai en particulier pour $A = F$, ce qui implique que $\text{Im}(f) = F$.)

Or, d'après la question précédente, on sait que pour toute partie $A \subset F$, $A \cap \text{Im}(f) = f(f^{-1}(A))$ donc on a bien montré l'équivalence

$$\boxed{f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall A \subset F, f(f^{-1}(A)) = A.}$$

2. (a) Soit $X \subset E$. Soit $x \in X$. On a $f(x) \in f(X)$ donc par définition, ceci implique que $x \in f^{-1}(f(X))$ d'où l'inclusion $X \subset f^{-1}(f(X))$.

$$\text{On a donc bien montré que } \boxed{\forall X \subset E, X \subset f^{-1}(f(X)).}$$

- (b) • Supposons que f est injective. Montrons que pour tout $X \subset E$, on a $X = f^{-1}(f(X))$.

Soit $X \subset E$. D'après la question précédente, on sait que $X \subset f^{-1}(f(X))$. Il nous reste donc à montrer que $f^{-1}(f(X)) \subset X$.

Soit $x \in f^{-1}(f(X))$. Par définition, ceci implique que $f(x) \in f(X)$. Ainsi, il existe $a \in X$ tel que $f(x) = f(a)$. Puisque f est injective par hypothèse, on en déduit que $x = a$ donc $x \in X$.

On a donc bien l'inclusion $f^{-1}(f(X)) \subset X$ d'où l'égalité $X = f^{-1}(f(X))$ et ce pour toute partie $X \subset E$.

• Réciproquement, supposons que pour toute partie $X \subset E$, on a $X = f^{-1}(f(X))$. Montrons qu'alors f est injective.

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$. Posons $X = \{x\} \subset E$.

On a alors $f(x') \in f(X) = \{f(x)\}$ donc $x' \in f^{-1}(f(X)) = X$ par hypothèse, i.e. $x' \in \{x\}$, ce qui implique que $x = x'$ et prouve ainsi l'injectivité de f .

On a donc bien montré l'équivalence

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall X \subset E, X = f^{-1}(f(X)).$$

Exercice 19.

1. • Supposons que f^{-1} est injective. Montrons que f est surjective.

On sait que $f^{-1}(\text{Im}(f)) = f^{-1}(F) = E$ donc par injectivité de f^{-1} , ceci implique que $\text{Im}(f) = F$, d'où la surjectivité de f .

- Supposons que f est surjective. Montrons que f^{-1} est injective.

Soient A et B deux parties de F telles que $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$.

Alors $f(f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(B))$. Or, d'après l'exercice précédent, puisque f est surjective, on a $f(f^{-1}(A)) = A$ et $f(f^{-1}(B)) = B$ donc $A = B$, ce qui prouve l'injectivité de f^{-1} .

On a donc bien montré que f^{-1} est injective si et seulement si f est surjective.

2. • Supposons que f^{-1} est surjective. Montrons que f est injective.

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$.

Par surjectivité de f^{-1} , il existe $A \in \mathcal{P}(F)$ tel que $f^{-1}(A) = \{x\}$. Par définition, ceci implique que $f(x) \in A$.

Puisque $f(x') = f(x)$, on a donc $f(x') \in A$ d'où $x' \in f^{-1}(A) = \{x\}$, ce qui implique que $x' = x$.

On a donc bien prouvé l'injectivité de f .

- Supposons que f est injective. Montrons que f^{-1} est surjective.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. D'après l'exercice précédent, puisque f est injective, on a $f^{-1}(f(X)) = X$ ce qui entraîne que $X \in \text{Im}(f^{-1})$.

Ainsi, tout élément de $\mathcal{P}(E)$ admet un antécédent par f^{-1} , ce qui assure la surjectivité de f^{-1} .

On a donc bien montré que f^{-1} est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 20. Tout d'abord remarquons que si $A \subset X \subset A \cup B$, on a bien $A \cap B \subset X \cap B \subset B$ et si $A \cap B \subset Y \subset B$, alors $A \subset Y \cup A \subset A \cup B$.

Pour montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre, il faut montrer que

$$g \circ f = \text{Id}_{[A, A \cup B]} \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_{[A \cap B, B]}.$$

Soit $X \in [A, A \cup B]$.

On a

$$g \circ f(X) = g(X \cap B) = (X \cap B) \cup A = (X \cup A) \cap (A \cup B).$$

Puisque $A \subset X$, on a $X \cup A = X$, donc $g \circ f(X) = X \cap (A \cup B) = X$ car $X \subset A \cup B$.

Ainsi, pour tout $X \in [A, A \cup B]$, on a $g \circ f(X) = X$ donc on a bien $g \circ f = \text{Id}_{[A, A \cup B]}$.

De même, soit $Y \in [A \cap B, B]$. On a

$$f \circ g(Y) = f(Y \cup A) = (Y \cup A) \cap B = (Y \cap B) \cup (A \cap B).$$

Puisque $Y \subset B$, on a $Y \cap B = Y$ donc $f \circ g(Y) = Y \cup (A \cap B) = Y$ car $A \cap B \subset Y$.

Ainsi, pour tout $Y \in [A \cap B, B]$, on a $f \circ g(Y) = Y$ donc on a bien $f \circ g = \text{Id}_{[A \cap B, B]}$.

On a donc bien $g \circ f = \text{Id}_{[A, A \cup B]}$ et $f \circ g = \text{Id}_{[A \cap B, B]}$.

D'après le cours, ceci prouve bien que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

Exercice 21. • Supposons que f est injective et montrons que f est surjective.

Soit $y \in E$. Puisque $f \circ f \circ f = f$, on a $f(f \circ f(y)) = f(y)$, ce qui implique par injectivité de f que $f(f(y)) = y$. En posant $x = f(y)$, on a bien $f(x) = y$ donc y admet un antécédent par f . Ceci étant valable pour tout $y \in E$, on en déduit que f est surjective.

• Supposons que f est surjective et montrons que f est injective.

Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.

Puisque f est surjective, il existe $(a, b) \in E^2$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. En composant par f , on obtient $f \circ f(a) = f(x) = f(y) = f \circ f(b)$ puis en composant de nouveau par f , on trouve $f \circ f \circ f(a) = f \circ f \circ f(b)$. Or, $f \circ f \circ f = f$, donc $f(a) = f(b)$, i.e. $x = y$, ce qui prouve que f est injective.

Remarque : ceci prouve en fait que sous l'hypothèse $f \circ f \circ f = f$, l'application f est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective et dans ce cas, en composant par f^{-1} , l'hypothèse $f \circ f \circ f = f$ donne $f \circ f = \text{Id}_E$, d'où $f^{-1} = f$.

Exercice 22.

1. Puisque $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que l'application $f \circ g$ est surjective et injective, ce qui implique d'après le cours que f est surjective et que g est injective.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x^3) = g(f \circ g(x)) = (g \circ f)(g(x)) = g(x)^2$$

et

$$f(x^2) = f(g \circ f(x)) = (f \circ g)(f(x)) = f(x)^3.$$

3. Tout d'abord, puisque g est injective d'après la première question, $g(-1), g(0)$ et $g(1)$ sont trois réels distincts deux à deux.

D'après la question précédente, on a $g(-1)^2 = g((-1)^3) = g(-1), g(0)^2 = g(0^3) = g(0)$ et $g(1)^2 = g(1^3) = g(1)$.

Ainsi, $g(-1), g(0), g(1)$ sont trois solutions différentes de l'équation $X^2 = X$ qui admet exactement deux solutions réelles : 0 et 1. On aboutit à une contradiction.

Il ne peut donc pas exister de telles fonctions f et g .

Exercice 23.

1. • Supposons que f est injective. Montrons que $A \cup B = E$.

On a $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$ et $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$.

Ainsi, $f(A \cup B) = f(E)$, ce qui implique par injectivité de f que $A \cup B = E$.

• Réciproquement, supposons que $A \cup B = E$ et montrons que f est injective.

Soient $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ telles que $f(X) = f(Y)$, i.e. $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$

$$\text{d'où } \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}.$$

Puisque $A \cup B = E$, on a alors

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y.$$

Ainsi, $f(X) = f(Y)$ implique que $X = Y$, ce qui prouve l'injectivité de f .

2. • Supposons que f est surjective. Il existe alors $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \emptyset)$, i.e. $(X \cap A, X \cap B) = (A, \emptyset)$ d'où

$$\begin{cases} X \cap A = A \\ X \cap B = \emptyset \end{cases}.$$

Ceci implique en particulier que $A \subset X$ donc $A \cap B \subset X \cap B = \emptyset$, d'où $A \cap B = \emptyset$.

• Réciproquement, supposons que $A \cap B = \emptyset$ et montrons que f est surjective. Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Posons $X = A' \cup B' \in \mathcal{P}(E)$. Puisque $A' \subset A$, on a $A' \cap A = A'$ et puisque $B' \subset B$, on a $B' \cap A \subset B \cap A = \emptyset$ donc

$$X \cap A = (A' \cup B') \cap A = (A' \cap A) \cup (B' \cap A) = A' \cup \emptyset = A'.$$

On montre de même que $X \cap B = B'$ et on a bien $f(A' \cup B') = (A', B')$, ce qui prouve que f est surjective.