

6

Trigonométrie

TABLE DES MATIÈRES

6	Trigonométrie	1
6.1	Fonctions circulaires	2
6.1.1	Cercle trigonométrique	2
6.1.2	Propriétés	3
6.2	Résolution d'équations trigonométriques	10
6.2.1	Equations $\cos(x) = c, \sin(x) = s, \tan(x) = t$	10
6.2.2	Equations $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = c$	11
6.3	Fonctions circulaires	12
6.3.1	Fonctions cosinus et sinus	12
6.3.2	Fonction tangente	14

Etymologiquement, le terme trigonométrie vient du grec « trigonos » (triangulaire) et « metron » (mesure). Comme son nom l'indique, le but de ce domaine est donc d'établir des relations entre les longueurs des côtés d'un triangle et les mesures des angles de celui-ci.

Dans tout le chapitre, on adoptera la notation suivante : pour tous réels a, b, c , on dit que a est congru à b modulo c , et on note $a \equiv b[c]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $a - b = kc$.

6.1 Fonctions circulaires

6.1.1 Cercle trigonométrique

Définition 1

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle cercle trigonométrique le cercle orienté de centre O et de rayon 1.

• Pour tout réel $\theta \in [0, 2\pi[$, il existe un unique point $M(\theta)$ sur le cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(\theta)})$ soit égal à θ .

On définit alors le cosinus de l'angle θ , noté $\cos(\theta)$, comme l'abscisse du point $M(\theta)$ et le sinus de l'angle θ , noté $\sin(\theta)$, comme l'ordonnée du point $M(\theta)$.

Si $\cos(\theta) \neq 0$, autrement dit si $\theta \notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, on définit la tangente de l'angle θ , notée $\tan(\theta)$, par $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

• Pour tout réel x , il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x \equiv \theta[2\pi]$.

On définit alors le cosinus et le sinus de x par les égalités

$$\cos(x) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(\theta).$$

Si $\cos(x) \neq 0$, autrement dit si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on définit la tangente de x par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Remarque 1. Par définition, pour tout réel x , on a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

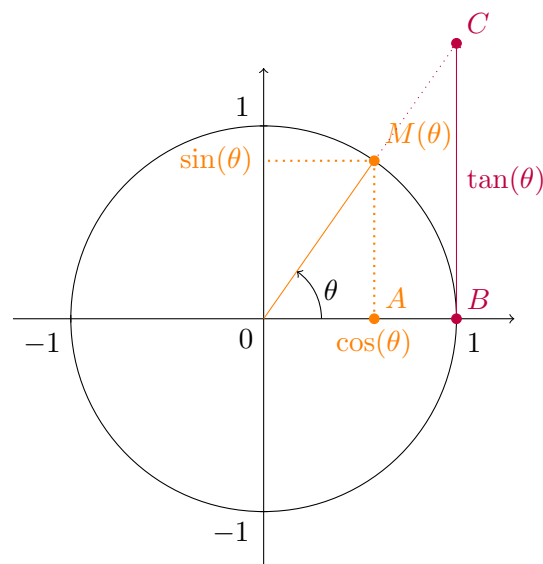


FIGURE 6.1 – Les fonctions circulaires, vues sur le cercle trigonométrique

Remarque 2. Sur la figure, on retrouve dans le triangle rectangle $OAM(\theta)$ les propriétés bien connues suivantes (en utilisant le fait que $OM(\theta) = 1$) :

$$\cos(\theta) = OA = \frac{OA}{OM(\theta)} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}},$$

et

$$\sin(\theta) = AM(\theta) = \frac{AM(\theta)}{OM(\theta)} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

Dans le cas où $\tan(\theta)$ est bien définie, on a alors

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AM(\theta)}{OA} = \frac{BC}{OB} = BC,$$

où l'avant-dernière égalité découle du théorème de Thalès.

Ceci justifie la terminologie « tangente » : la tangente d'un angle est la longueur (algébrique) du segment obtenu en parcourant la tangente au cercle trigonométrique du point $(1, 0)$ jusqu'au point d'intersection avec la droite $(OM(\theta))$.

Définition 2

Pour tout point M du cercle trigonométrique, il existe un unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} = \theta$.

Ce réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})}$.

Les principaux angles avec leurs mesures principales sont ceux sur la figure 2.

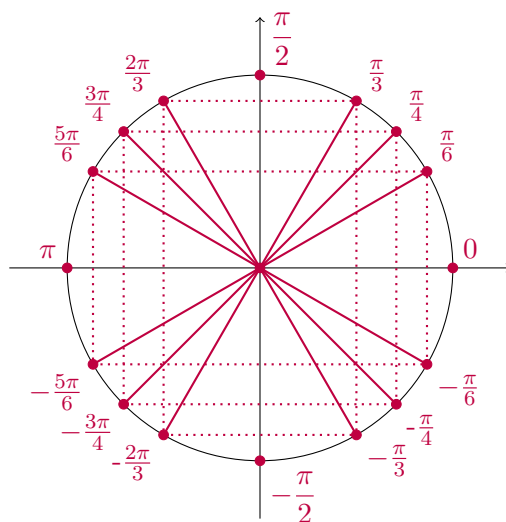


FIGURE 6.2 – Les principaux angles avec leurs mesures principales

Remarque 3. On voit sur la figure les propriétés suivantes :

- $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi]$; • $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv \pi[2\pi]$; • $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$;
- $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; • $\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; • $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$.
- Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- Si $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$ et $\sin(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi, 2\pi]$.

6.1.2 Propriétés

Tout d'abord, citons la relation fondamentale de la trigonométrie.

Proposition 1: Relation fondamentale de la trigonométrie

Pour tout réel x , on a

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Démonstration. Soit θ l'unique réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $x \equiv \theta[2\pi]$.

Reprenons la figure 1. Dans le triangle rectangle $OAM(\theta)$, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$OA^2 + AM(\theta)^2 = OM(\theta)^2 = 1$$

d'où $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, i.e. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. ■

Une autre propriété importante est la périodicité.

Proposition 2: Périodicité des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

Démonstration. Ceci découle de la définition du cosinus et du sinus. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{Z}$.

Posons $y = x + 2k\pi$. Soit θ l'unique réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $x \equiv \theta[2\pi]$. Par définition, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \theta + 2k'\pi$, d'où $y = \theta + 2(k + k')\pi$ avec $k + k' \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $y \equiv \theta[2\pi]$ donc θ est l'unique réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $y \equiv \theta[2\pi]$. Dans ces conditions, on a bien

$$\cos(y) = \cos(x) = \cos(\theta)$$

et

$$\sin(y) = \sin(x) = \sin(\theta).$$

■

Proposition 3: Parité et symétries

1. La fonction cosinus est paire et les fonctions sinus et tangente sont impaires, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(-x) = -\tan(x).$$

- 2.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

et

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(\pi - x) = -\tan(x).$$

- 3.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi + x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

et

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(\pi + x) = \tan(x).$$

En particulier, ceci signifie que la fonction tangente est π -périodique.

- 4.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

et

$$\forall x \neq 0\left[\frac{\pi}{2}\right], \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}.$$

- 5.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

et

$$\forall x \neq 0\left[\frac{\pi}{2}\right], \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le point $M(x)$ du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$.

1. Le point $M(-x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \widehat{OM(-x)}) \equiv -x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie d'axe $(O, \vec{i})$.

Ainsi, les coordonnées de $M(-x)$ sont $(\cos(x), -\sin(x))$, ce qui implique que

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x).$$

On en déduit que si $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

2. Le point $M(\pi - x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \widehat{OM(\pi - x)}) \equiv \pi - x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie d'axe $(O, \vec{j})$.

Ainsi, les coordonnées de $M(\pi - x)$ sont $(-\cos(x), \sin(x))$, ce qui implique que

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin(x).$$

On en déduit que si $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$.

3. Le point $M(\pi + x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \widehat{OM(\pi + x)}) \equiv \pi + x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie de centre O .

Ainsi, les coordonnées de $M(\pi + x)$ sont $(-\cos(x), -\sin(x))$, ce qui implique que

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi + x) = -\sin(x).$$

On en déduit que si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.

4. Le point $M(\frac{\pi}{2} - x)$ du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \widehat{OM(\frac{\pi}{2} - x)}) \equiv \frac{\pi}{2} - x[2\pi]$ est obtenu à partir de $M(x)$ en lui appliquant la symétrie d'axe la première bissectrice.

Ainsi, les coordonnées de $M(\frac{\pi}{2} - x)$ sont $(\sin(x), \cos(x))$, ce qui implique que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

On en déduit que si $x \not\equiv 0[\frac{\pi}{2}]$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$.

5. On applique les formules précédentes en remplaçant x par $-x$ et on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin(x)$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos(x).$$

On en déduit que si $x \not\equiv 0[\frac{\pi}{2}]$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\tan(x)}$.

■

Proposition 4: Formules d'addition

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
4. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
5. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
6. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a - b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Démonstration. • Soient $M(a)$ et $M(b)$ les points du cercle trigonométrique de coordonnées respectives $(\cos(a), \sin(a))$ et $(\cos(b), \sin(b))$.

On a alors

$$\overrightarrow{OM(a)} \cdot \overrightarrow{OM(b)} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Par ailleurs, on a également

$$\overrightarrow{OM(a)} \cdot \overrightarrow{OM(b)} = OM(a) \times OM(b) \times \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{OM(a)}, \overrightarrow{OM(b)})}\right) = \cos(b - a).$$

Ceci prouve que

$$\cos(a - b) = \cos(b - a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

- En remplaçant b par $-b$, on obtient

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

- On en déduit que

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).\end{aligned}$$

- Ensuite, en remplaçant b par $-b$, on trouve

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

- Ainsi, si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(a)\cos(b)(\tan(a) + \tan(b))}{\cos(a)\cos(b)(1 - \tan(a)\tan(b))}$$

$$\text{d'où } \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

- Enfin, si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, en remplaçant b par $-b$ dans la formule précédente, on obtient par imparité de la fonction tangente :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) + \tan(-b)}{1 - \tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

■

Remarque 4. On en déduit d'autres formules qui peuvent être pratiques : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)),$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

et

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

Corollaire 1: Formules de duplication

Pour tout réel a , on a :

1.

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a).$$

2.

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

3. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a \not\equiv \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, alors

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}.$$

Démonstration.

1. D'après les formules d'addition, on a

$$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a).$$

En utilisant le fait que $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, on trouve

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1.$$

En utilisant le fait que $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$, on trouve

$$\cos(2a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$$

2. On a

$$\sin(2a) = \sin(a + a) = \sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

3. Enfin, si $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a \neq \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, alors $2a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et on peut écrire

$$\tan(2a) = \tan(a + a) = \frac{\tan(a) + \tan(a)}{1 - \tan(a)\tan(a)} = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}.$$

■

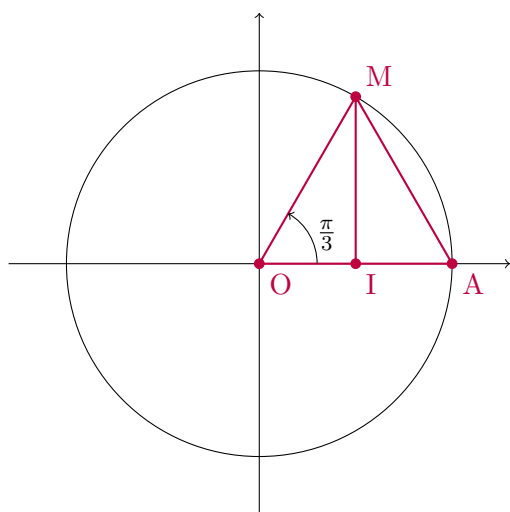
Corollaire 2: Angles remarquables

On a les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Démonstration. Les valeurs pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ ont déjà été vues.

- Pour $x = \frac{\pi}{3}$, on a la figure suivante.



Le triangle OMA est isocèle en O puisque $OM = OA = 1$.

Or, $\widehat{MOA} = \frac{\pi}{3}$ donc $\widehat{OMA} = \widehat{MAO} = \frac{\pi - \widehat{MOA}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Ainsi, $\widehat{MOA} = \widehat{OMA} = \widehat{MAO}$ donc le triangle AOM est équilatéral.

La hauteur MI est donc aussi la médiane issue de M , ce qui implique que I est le milieu de $[OA]$.

On en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = OI = \frac{OA}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a donc

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$, il vient

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}$.

- Pour $x = \frac{\pi}{6}$, on utilise les formules montrées précédemment :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Enfin, pour $x = \frac{\pi}{4}$, en utilisant la formule $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$, on trouve

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi, $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et puisque $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, on a encore

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il en découle que

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.$$

■

Exemple 1.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

6.2 Résolution d'équations trigonométriques

6.2.1 Equations $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$

En utilisant les symétries et périodicités des fonctions cosinus, sinus et tangente, on a immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 5

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

1. $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y[2\pi]$.
2. $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - y[2\pi]$.
3. $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x \equiv y[\pi]$.

Exemple 2. • $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

• $\sin(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

• $\tan(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{3}[\pi]$.

Définition 3

- Pour tout $c \in [-1, 1]$, l'équation $\cos(\theta) = c$ admet une unique solution dans $[0, \pi]$. Cette solution est notée $\arccos(c)$.
- Pour tout $s \in [-1, 1]$, l'équation $\sin(\theta) = s$ admet une unique solution dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cette solution est notée $\arcsin(s)$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(\theta) = t$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cette solution est notée $\arctan(t)$.

Remarque 5. •

$$\forall c \in [-1, 1], \cos(\arccos(c)) = c \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta.$$

En revanche, on a par exemple $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{2})) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$.

•

$$\forall s \in [-1, 1], \sin(\arcsin(s)) = s \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta.$$

En revanche, on a par exemple $\arcsin(\sin(\frac{2\pi}{3})) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$.

•

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(t)) = t \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta.$$

En revanche, on a par exemple $\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0 \neq \pi$.

Exemple 3.

$$\begin{aligned} \cos(2x) = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi. \end{aligned}$$

6.2.2 Equations $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = c$

On s'intéresse dans cette dernière section aux équations de la forme $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = c$ où a, b, c sont trois réels et θ est l'indéterminée.

Si a et b sont simultanément nuls, l'équation n'est vraie que si $c = 0$. Excluons donc ce cas. On suppose dorénavant que $(a, b) \neq (0, 0)$ (i.e. a et b ne peuvent être simultanément nuls).

Ainsi, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$: on peut donc diviser l'équation par ce terme et on obtient

$$a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\theta) \right).$$

Posons $a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

On a $a'^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1$ donc $a' \in [-1, 1]$. Ainsi, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi) = a'$.

Par ailleurs, $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} = b'^2$ donc $\sin(\varphi) = \pm b'$.

Quitte à changer φ en $-\varphi$ (ce qui ne modifiera pas la valeur de $\cos(\varphi)$), on peut supposer que

$$\cos(\varphi) = a' \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = b'.$$

En posant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, il vient

$$a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = r(\cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\theta)) = r \cos(\theta - \varphi).$$

On a donc montré qu'on peut toujours transformer une expression de la forme $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$ en $r \cos(\theta - \varphi)$.

Exemple 4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta) \right) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Remarque 6. Si on avait choisi φ tel que $\sin(\varphi) = a'$ et $\cos(\varphi) = b'$, on aurait trouvé une expression de la forme $r \sin(\theta + \varphi)$, ce qui peut être avantageux dans certaines situations.

On peut maintenant résoudre facilement l'équation $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = c$.

En effet, on vient de montrer que celle-ci est équivalente à une équation de la forme

$$r \cos(\theta - \varphi) = c$$

ou encore

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{c}{r}.$$

Si $\frac{c}{r} \notin [-1, 1]$, cette équation n'admet pas de solution.

Si $\frac{c}{r} \in [-1, 1]$, $\cos(\theta - \varphi) = \cos\left(\arccos\left(\frac{c}{r}\right)\right)$.

On a alors $\theta - \varphi \equiv \arccos\left(\frac{c}{r}\right) [2\pi]$ ou $\theta - \varphi \equiv -\arccos\left(\frac{c}{r}\right) [2\pi]$ d'où

$$\theta \equiv \varphi + \arccos\left(\frac{c}{r}\right) [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \varphi - \arccos\left(\frac{c}{r}\right) [2\pi].$$

Exemple 5. Résolvons l'équation $\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1 &\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\right) = 1 \\&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2} \\&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\&\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} - x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \\&\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi[2\pi].\end{aligned}$$

6.3 Fonctions circulaires

6.3.1 Fonctions cosinus et sinus

On a déjà vu les propriétés de parité et de périodicité des fonctions cosinus et sinus. Etudions maintenant leur dérivabilité.

Commençons par un lemme.

Lemme 1

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0.$$

Démonstration. • Par des considérations d'aires sur le cercle trigonométrique, on remarque que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = 1$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est paire, on a également $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

• En utilisant les formules de duplication, on a pour tout réel x ,

$$1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

donc pour tout réel x non nul :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Or, $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \end{array} \right.$ donc par composition de limites, on trouve que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$

et on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

- Enfin, on en conclut par produit de limites que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} = 0.$$

■

Proposition 6: Dérivation du cosinus et du sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Démonstration. • Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \sin(h) \cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \times \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \cos(x) \times \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\rightarrow 1} \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

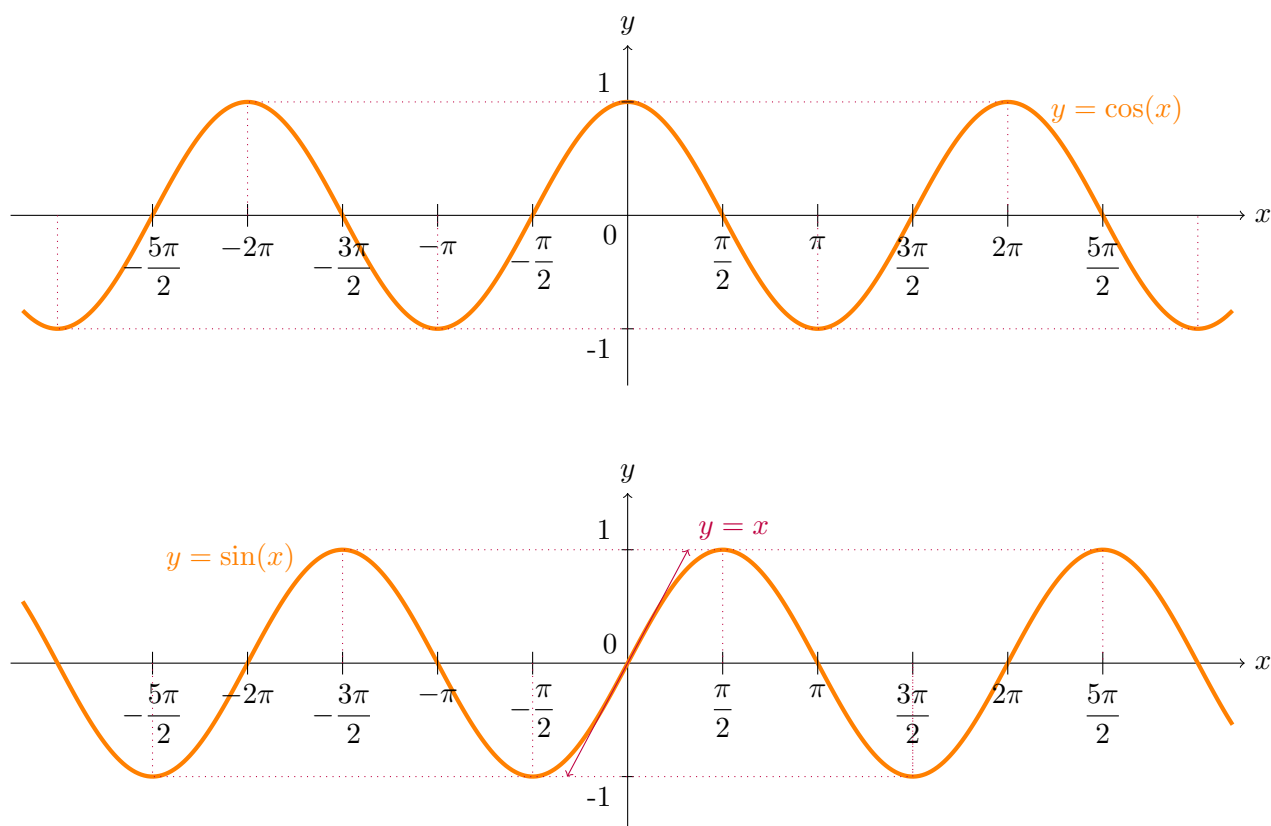
ce qui prouve que $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \sin(x) \sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \times \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} - \sin(x) \times \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\rightarrow 1} \\ &= -\sin(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$. ■



Enfin, signalons l'inégalité suivante, très utile en pratique :

Proposition 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Démonstration.

- Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\sin(x)| \leq |x| = x$ i.e. $-x \leq \sin(x) \leq x$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sin(x) + x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \cos(x) + 1 \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq f(0) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) + x \geq 0$, i.e. $\sin(x) \geq -x$.

De même, posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x - \sin(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geq g(0) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \sin(x) \geq 0$, i.e. $\sin(x) \leq x$.

On a donc bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \leq \sin(x) \leq x$, i.e. $-|x| \leq \sin(x) \leq |x|$ ou encore $|\sin(x)| \leq |x|$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Alors $-x \in \mathbb{R}_+$ donc d'après ce qui précède, $|\sin(-x)| \leq |-x| = |x|$.

Par imparité de $\sin$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et on obtient alors $|\sin(x)| \leq |x|$, i.e. $|\sin(x)| \leq |x|$, ce qui est vrai pour tout réel $x \leq 0$.

On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$. ■

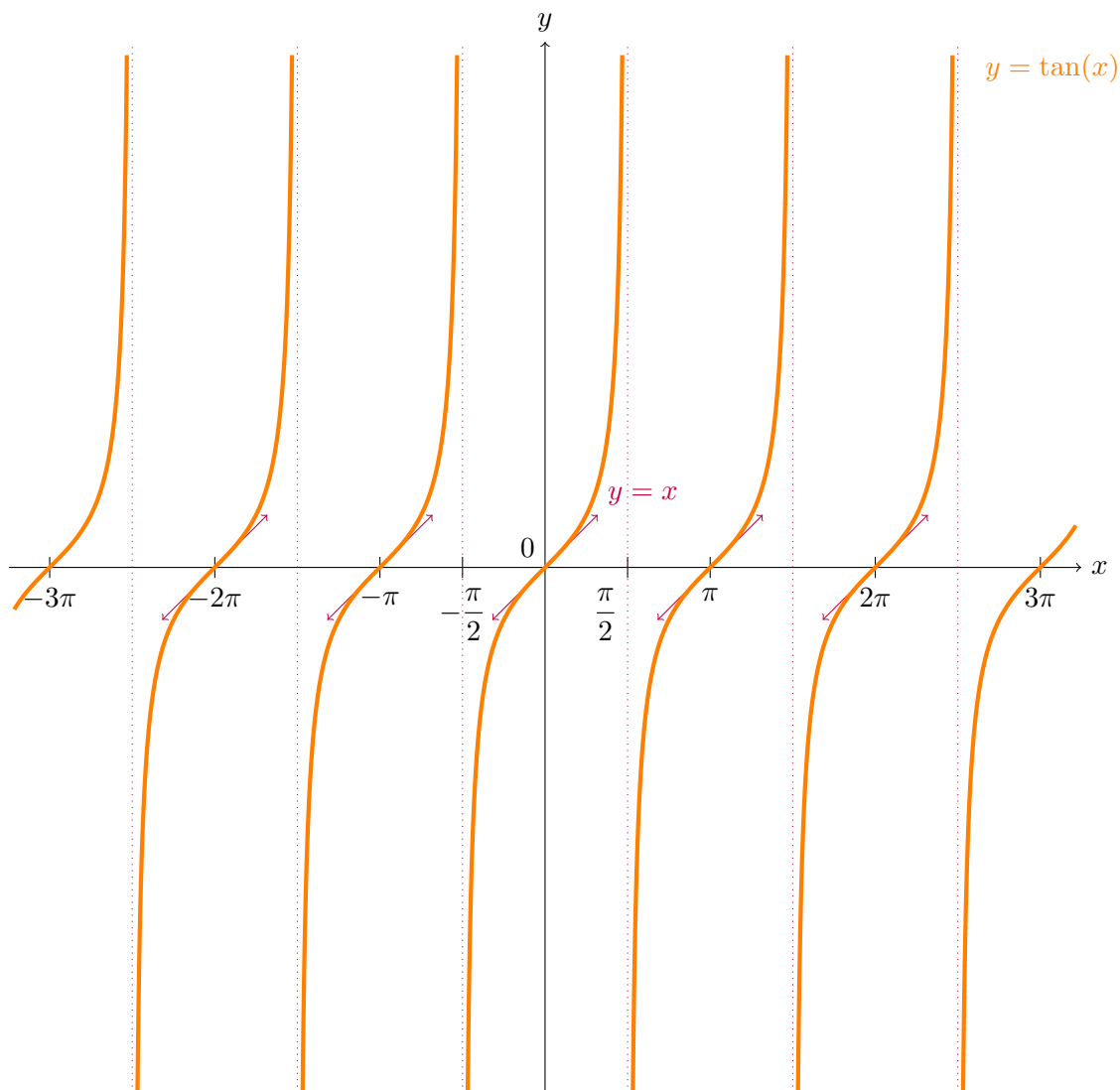
Remarque 7. On verra plus tard que cette inégalité est également une conséquence de l'inégalité des accroissements finis.

6.3.2 Fonction tangente

On a vu que la fonction tangente est définie sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, est impaire et π -périodique.

On sait que la fonction tangente est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ avec $\tan(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$).

Ceci permet de tracer la courbe de la fonction tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. On la complète sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par symétrie par rapport à l'origine puis sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ par π -périodicité. On retrouve en particulier que $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et que $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$. On obtient la courbe suivante :



On remarque que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ est une asymptote verticale.

Enfin, on a le résultat suivant :

Proposition 8: Dérivation de la fonction tangente

La fonction tangente est dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ et on a pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ainsi, la fonction

tangente est dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, le dénominateur ne s'y annulant pas et on a pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

D'autre part, on a également pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$,

$$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

On a donc bien pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. ■

Ainsi, une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction tangente au point $(0, 0)$ est

$$y = \tan'(0)(x - 0) + \tan(0) = (1 + \tan^2(0))x = x.$$