

## Liste d'exercices n°6

## Trigonométrie

**Exercice 1.** Soient  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer les formules suivantes :

1.  $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
2.  $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$
3.  $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
4.  $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$

**Exercice 2.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\cos(3a), \cos(4a), \sin(3a), \sin(4a)$  en fonction de  $\cos(a)$  et  $\sin(a)$ .

**Exercice 3.** Résoudre les équations suivantes sur  $\mathbb{R}$  puis sur  $] -\pi; \pi]$ .

1.  $\sin(x) = -\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$
2.  $\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
3.  $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
4.  $\sin(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
5.  $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$
6.  $\cos(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

**Exercice 4.** Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x$  réelle.

1.  $\tan(x) = \sqrt{3}$
2.  $\sin(2x) = \sqrt{3}$
3.  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4.  $2 \cos(3x) = 1$
5.  $\tan(2x) = -1$

**Exercice 5.** Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue  $x$  réelle.

1.  $\sin(x) < \pi$
2.  $\sin(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3.  $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4.  $\tan(x) > \sqrt{3}$
5.  $\cos(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
6.  $\sin(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**Exercice 6.** Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x$  réelle.

1.  $\sqrt{3} \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$
2.  $\sqrt{3} \cos(7x) - \sin(7x) = 1$
3.  $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 2 \cos(x)$
4.  $2 \cos^2(x) = 7 \cos(x) - 3$
5.  $\begin{cases} 2 \sin(x) - 4 \cos(x) = \sqrt{3} + 2 \\ \sin(x) + \sqrt{3} \cos(x) = 0 \end{cases}$

**Exercice 7.** Comment doit-on choisir  $w$  pour que l'équation suivante

$$1 + \sin^2(wx) = \cos(x),$$

d'inconnue  $x$  réelle ait une unique solution ?

**Exercice 8.** Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2^n} \right).$$

**Exercice 9.** Soit  $\theta$  un réel tel que  $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$  et  $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$ .

On pose  $t = \tan \left( \frac{\theta}{2} \right)$ .

Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

**Exercice 10.** Résoudre l'équation  $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$ , où  $n$  est un entier strictement positif.

**Exercice 11.** Soient  $a, b, c, d$  des éléments de  $[0, \pi]$ .

1. Montrer que  $\sin(a) + \sin(b) \leq 2 \sin \left( \frac{a + b}{2} \right)$ .
2. En déduire que  $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) \leq 4 \sin \left( \frac{a + b + c + d}{4} \right)$ .
3. Montrer que  $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq 3 \sin \left( \frac{a + b + c}{3} \right)$ .

**Exercice 12.** Calculer la somme suivante en fonction de  $\theta$  et de  $n$  :

$$S = \sum_{k=1}^n \cos((2k - 1)\theta).$$

(Indication : calculer  $2 \sin(\theta)S$  et faire apparaître une somme télescopique.)

**Exercice 13.** Calculer la somme suivante en fonction de  $\theta$  et de  $n$  :

$$S = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta).$$