
DEVOIR MAISON N°3
A RENDRE POUR LE VENDREDI 16 OCTOBRE 2026

Exercice: Points fixes d'une permutation

Soit n un entier naturel non nul.

On dispose d'une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n . On réalise l'expérience suivante : on tire successivement, et sans remise, toutes les boules de l'urne.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on dit que i est un **point fixe** du tirage si la boule i a été tirée à la i -ème position.

Exemple : si l'urne contient quatre boules, le tirage $(3, 2, 1, 4)$ admet 2 et 4 pour points fixes, mais le tirage $(2, 3, 4, 1)$ n'admet pas de point fixe.

Pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note $F(n, p)$ le nombre de tirages qui admettent exactement p points fixes.

Par convention, on pose également $F(0, 0) = 1$.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
2. Pour tout $p \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, calculer $F(4, p)$.
3. Evaluer $F(n, n)$ et $F(n, n - 1)$.

4. Montrer que $\sum_{k=0}^n F(n, k) = n!$.

Posons $\omega_n = F(n, 0)$, le nombre de tirages sans point fixe.

5. Montrer que, pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $F(n, k) = \binom{n}{k} \omega_{n-k}$.

6. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} = 1$.

7. (a) Montrer que

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!}.$$

- (b) En raisonnant par récurrence forte, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Problème : Nombre de surjections entre ensembles finis

Le but de ce problème est de dénombrer les surjections entre intervalles d'entiers.

On note pour tout entier naturel n non nul l'intervalle d'entiers $I_n = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (n, p) , on appelle $S_{n,p}$ le nombre de surjections de I_n vers I_p .

Partie I: Premiers exemples

1. Que vaut $S_{n,p}$ si $p > n$? Et si $p = n$?
2. Calculer $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $S_{p+1,p}$ pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$.

Partie II: Cas général

Dans toute cette partie, on considère deux entiers naturels non nuls p et n tels que $n \geq p$.

1. Justifier que $S_{n,p} > 0$.
2. Vérifier que $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} = 0$.
3. Soient k et l des entiers naturels tels que $k \leq l \leq p$.
 - (a) Vérifier que $\binom{p}{l} \binom{l}{k} = \binom{p}{k} \binom{p-k}{l-k}$.
 - (b) En déduire que si $k < p$, alors $\sum_{l=k}^p (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k} = 0$. Que peut-on dire si $k = p$?
4. Montrer que pour tout entier $k \in I_p$, le nombre d'applications de I_n vers I_p dont l'image contient k éléments vaut $\binom{p}{k} S_{n,k}$.
5. En déduire que $p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S_{n,k}$.
6. En conclure que $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{l=1}^p (-1)^l \binom{p}{l} l^n$.

Partie III: Calcul par récurrence des $S_{n,p}$

On suppose toujours que n est un entier naturel non nul.

1. Montrer que si $0 < p \leq n-1$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

Indication: étant donné une surjection φ de I_n vers I_p , considérer sa restriction φ_1 à I_{n-1} et discuter selon le caractère surjectif ou non de φ_1 .
2. Retrouver la valeur de $S_{p+1,p}$, puis montrer que $S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
3. En s'inspirant du triangle de Pascal, montrer qu'on peut construire une table des $S_{n,p}$.

Construire cette table pour $0 < p \leq n \leq 5$.