
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°2

Exercice

1. • Montrons l'implication Φ est injective $\Rightarrow A \cup B = E$. Pour cela montrons la contraposée $A \cup B \neq E \Rightarrow \Phi$ n'est pas injective.

Supposons donc que $A \cup B \neq E$. Puisque $A \cup B \subset E$, ceci implique qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $x_1 \in \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, i.e. $x_1 \notin A$ et $x_1 \notin B$.

Soit $f \in F^E$. Soit $y_1 = f(x_1) \in F$. Par hypothèse, F contient au moins deux éléments donc il existe $y_2 \in F$ tel que $y_2 \neq y_1$.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \text{Soit } g : & x \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_1 \\ y_2 & \text{si } x = x_1 \end{cases} \end{array}$$

En particulier, pour tout $x \in E \setminus \{x_1\}$, $f(x) = g(x)$. Puisque $x_1 \notin A$ et $x_1 \notin B$, on a en particulier $f|_A = g|_A$ et $f|_B = g|_B$ donc $\Phi(f) = \Phi(g)$ mais $f \neq g$ (puisque $f(x_1) \neq g(x_1)$) ce qui prouve que Φ n'est pas injective.

Par contraposée, on a donc bien montré que si Φ est injective, alors $A \cup B = E$.

- Montrons l'implication $A \cup B = E \Rightarrow \Phi$ est injective.

Supposons que $A \cup B = E$. Montrons que Φ est injective.

$$\text{Soient } (f, g) \in (F^E)^2 \text{ tels que } \Phi(f) = \Phi(g), \text{ i.e. } \begin{cases} f|_A = g|_A \\ f|_B = g|_B \end{cases}$$

Soit $x \in E$. Puisque $A \cup B = E$, alors $x \in A$ ou $x \in B$.

- Si $x \in A$, puisque $f|_A = g|_A$, on en déduit que $f(x) = g(x)$.

- Si $x \in B$, puisque $f|_B = g|_B$, on en déduit que $f(x) = g(x)$.

Dans les deux cas, $f(x) = g(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$, i.e. $f = g$.

On a donc montré que $\forall (f, g) \in (F^E)^2, \Phi(f) = \Phi(g) \Rightarrow f = g$, ce qui prouve que Φ est injective.

On en conclut que Φ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2. • Montrons l'implication Φ est surjective $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Supposons que Φ est surjective.

Comme dans la question précédente, considérons y_1 et y_2 deux éléments différents de F .

Soit $g : A \longrightarrow F$ la fonction constante égale à y_1 et $h : B \longrightarrow F$ la fonction constante égale à y_2 .

Alors $(g, h) \in F^A \times F^B$. Par hypothèse, $\Phi : F^E \longrightarrow F^A \times F^B$ est surjective donc il existe $f \in F^E$ tel que $\Phi(f) = (g, h)$, i.e. $f|_A = g$ et $f|_B = h$.

S'il existait un élément $x \in A \cap B$, on aurait d'une part $f(x) = f|_A(x) = g(x) = y_1$ et d'autre part $f(x) = f|_B(x) = h(x) = y_2$, ce qui est impossible car $y_1 \neq y_2$.

On a donc nécessairement $A \cap B = \emptyset$.

• Montrons l'implication $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Phi$ est surjective.

Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas, E est l'union disjointe des trois parties A , B et $\overline{A \cup B}$, i.e. $E = A \sqcup B \sqcup \overline{A \cup B}$.

Soient $(g, h) \in F^A \times F^B$. Montrons qu'il existe $f \in F^E$ tel que $\Phi(f) = (g, h)$, i.e. $f|_A = g$ et $f|_B = h$.

Soit $f : E \rightarrow F$ définie de la manière suivante:

$$\forall x \in E, f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A \\ h(x) & \text{si } x \in B \\ y_1 & \text{si } x \in \overline{A \cup B} \end{cases}$$

(En fait, on peut définir f n'importe comment sur $\overline{A \cup B}$.)

Cette définition est sans ambiguïté puisque A , B et $\overline{A \cup B}$ sont disjoints deux à deux et on a bien par définition $f|_A = g$ et $f|_B = h$, i.e. $\Phi(f) = (g, h)$ donc Φ est surjective.

On a donc bien montré que Φ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

3. D'après les deux questions précédentes, on sait qu'on a

$$\Phi \text{ est bijective} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow A \sqcup B = E.$$

Dans ce cas, tout élément de E appartient à un seul des deux ensembles A ou B .

La bijection réciproque de Φ est alors

$$\Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} F^A \times F^B & \longrightarrow & F^E \\ (f, g) & \longmapsto & \Phi^{-1}(f, g) \end{array}$$

où $\Phi^{-1}(f, g)$ est la fonction définie sur E par

$$\forall x \in E, \Phi^{-1}(f, g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}.$$

Problème 1: Théorème de Cantor-Bernstein

Partie I - Un résultat de point fixe

1. • Soit $X = E \in \mathcal{P}(E)$. On a $h(E) \in \mathcal{P}(E)$ donc $h(E) \subset E$, ce qui prouve que $E \in H_1$.

• Soit $X = \emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

On a $\emptyset \subset h(\emptyset)$ donc $\emptyset \in H_2$.

A fortiori, H_1 et H_2 sont non vides.

2. Tout d'abord, notons que $V \in \mathcal{P}(E)$.

• Montrons que $h(V) \subset V$.

Puisque $V = \bigcap_{X \in H_1} X$, on a pour tout $X \in H_1$, $V \subset X$.

Puisque h est croissante pour l'inclusion, on en déduit que pour tout $X \in H_1$, $h(V) \subset h(X)$.

Or, par définition de H_1 , pour tout $X \in H_1$, $h(X) \subset X$ donc pour tout $x \in H_1$, $h(V) \subset X$, ce qui implique que $h(V) \subset \bigcap_{X \in H_1} X = V$.

• Montrons que $V \subset h(V)$.

On vient de montrer que $h(V) \subset V$. Puisque h est croissante pour l'inclusion, ceci implique que $h(h(V)) \subset h(V)$ donc $h(V) \in H_1$.

Or, on sait que pour tout $X \in H_1$, $V \subset X$ donc $V \subset h(V)$.

On en conclut que $\boxed{h(V) = V}$.

3. Tout d'abord, notons que $W \in \mathcal{P}(E)$.

• Montrons que $W \subset h(W)$.

Puisque $W = \bigcup_{X \in H_2} X$, pour tout $X \in H_2$, $X \subset W$.

Puisque h est croissante pour l'inclusion, on en déduit que pour tout $X \in H_2$, $h(X) \subset h(W)$.

Or, pour tout $X \in H_2$, $X \subset h(X)$, donc pour tout $X \in H_2$, $X \subset h(W)$ et on en conclut que $\bigcup_{X \in H_2} X \subset h(W)$ d'où $W \subset h(W)$.

• Montrons que $h(W) \subset W$.

On a montré que $W \subset h(W)$. Puisque h est croissante pour l'inclusion, ceci implique que $h(W) \subset h(h(W))$ donc $h(W) \in H_2$.

Or, on sait que pour tout $X \in H_2$, $X \subset W$ donc $h(W) \subset W$.

On en conclut que $\boxed{h(W) = W}$.

4. • Puisque $h(X) = X$, on a en particulier $h(X) \subset X$ donc $X \in H_1$. Puisque V est inclus dans tous les éléments de H_1 , on en déduit que $V \subset X$.

• Puisque $h(X) = X$, on a en particulier $X \subset h(X)$ donc $X \in H_2$. Puisque tous les éléments de H_2 sont inclus dans W , on en déduit que $X \subset W$.

On en conclut que $\boxed{V \subset X \subset W}$.

Partie II - Démonstration du théorème

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Montrons que $h(A) \subset h(B)$.

On a les implications suivantes:

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ &\Rightarrow \overline{f(B)} \subset \overline{f(A)} \\ &\Rightarrow g(\overline{f(B)}) \subset g(\overline{f(A)}) \\ &\Rightarrow \overline{g(\overline{f(A)})} \subset \overline{g(\overline{f(B)})} \\ &\Rightarrow h(A) \subset h(B), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{h \text{ est une application croissante au sens de l'inclusion.}}$

Or, on a montré dans la première partie que toute application $h : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ croissante au sens de l'inclusion admet un point fixe.

On en déduit que $\boxed{h \text{ admet un point fixe } M}$.

2. • Par définition de M , on a $h(M) = M$, i.e. $\overline{g(\overline{f(M)})} = M$.

En passant au complémentaire, on obtient $\overline{\overline{g(\overline{f(M)})}} = \overline{M}$, d'où $\boxed{g(\overline{f(M)}) = \overline{M}}$.

• Soit $y \in \overline{M}$. Puisque $g(\overline{f(M)}) = \overline{M}$, il existe $x \in \overline{f(M)}$, tel que $g(x) = y$.

Ainsi, y admet un antécédent par g . Or, g est injective donc tout élément de E admet au plus un antécédent par g . Puisque y en admet au moins un, il en admet exactement un.

On en déduit que $\boxed{\text{tout élément de } \overline{M} \text{ a un unique antécédent par } g}$ (et on remarque qu'il est situé dans $\overline{f(M)}$).

3. • Montrons que ϕ est injective.

Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $x \neq y$. Montrons que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

▷ 1er cas: $(x, y) \in M^2$

Dans ce cas, $\phi(x) = f(x)$ et $\phi(y) = f(y)$. Puisque $x \neq y$ et que f est injective, on en déduit que $f(x) \neq f(y)$ donc $\phi(x) \neq \phi(y)$.

▷ 2ème cas: $(x, y) \in \overline{M}^2$

Par définition, $\phi(x)$ est l'unique antécédent de x par g et $\phi(y)$ est l'unique antécédent de y par g , i.e. $g(\phi(x)) = x$ et $g(\phi(y)) = y$.

Puisque $x \neq y$, ceci implique que $g(\phi(x)) \neq g(\phi(y))$ et on en déduit que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

▷ 3ème cas: $x \in M$ et $y \in \overline{M}$ (le cas $x \in \overline{M}$ et $y \in M$ se traite de façon analogue).

D'après la question précédente, l'unique antécédent de y par g est dans $\overline{f(M)}$ donc $\phi(y) \in \overline{f(M)}$. A fortiori, $\phi(x) \neq \phi(y)$ puisque $\phi(x) = f(x) \in f(M)$.

Dans tous les cas, on en conclut que $\phi(x) \neq \phi(y)$, ce qui prouve que ϕ est injective.

• Montrons que ϕ est surjective, i.e. montrons que pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) = y$.

Soit $y \in F$.

▷ 1er cas: $y \in f(M)$

Par définition, il existe alors $x \in M$ tel que $y = f(x) = \phi(x)$.

▷ 2ème cas: $y \in \overline{f(M)}$

Dans ce cas, y est l'unique antécédent par g de $g(y) \in \overline{M}$ donc $\phi(g(y)) = y$.

Dans les deux cas, y admet un antécédent par ϕ donc ϕ est surjective.

On en conclut que $\boxed{\phi \text{ est bijective.}}$

4. La fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x \end{matrix}$ est injective car strictement croissante et la fonction

$g : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x + 1 \end{matrix}$ l'est également pour la même raison.

Il existe donc une injection $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une injection $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de Cantor-Bernstein, $\boxed{\text{il existe bien une bijection entre } \mathbb{R}_+ \text{ et } \mathbb{R}_+^*}$.