7 Nombres complexes

De la même manière que des nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$ ont motivé la construction de l'ensemble des nombres réels, ce dernier ne suffit plus. En effet, l'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de racine réelle. Au XVIème siècle, Bombelli (après avoir lu les travaux de Cardan, eux-même inspirés de ceux de Tartaglia) en « invente »une pour résoudre des équations du troisième degré (à racines réelles !) et introduit la notation $\sqrt{-1}$. C'est l'apparition des nombres complexes. Ce nombre imaginaire est désormais noté i.

7.1 Introduction du corps des nombres complexes

7.1.1 Construction

On considère $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ l'ensemble des points du plan. L'axe des abscisses est identifié à la droite des nombres réels et tout point de la forme $(a,0)$ est identifié au nombre réel a. On munit $\mathbb{R}^2$ des opérations $+$ et $\times$ définies par

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

et

$$(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

Remarquons que ces opérations sont commutatives par commutativité des lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}$. Ces opérations étendent les lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{R}$: en effet, soient a et a' deux nombres réels. On a

$$(a,0) + (a',0) = (a+a', 0)$$

qui est identifié au nombre réel $a+a'$ et

$$(a,0) \times (a',0) = (aa', 0)$$

qui est identifié au nombre réel aa'.

De plus, on remarque que

$$(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) = (-1,0).$$

Ainsi, si on note $i = (0,1)$, on a bien $i^2 = -1$.

Plus généralement, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib.$$

On peut donc donner la définition de l'ensemble des nombres complexes :

Définition 1

On définit l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, par

$$\mathbb{C} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels. Cette écriture est appelée écriture algébrique (ou cartésienne) du nombre complexe z.
Le réel a est appelé la partie réelle du nombre complexe z et on note $a = \mathrm{Re}(z)$.
Le réel b est appelé la partie imaginaire du nombre complexe z et on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Exemple 1. Soit $z = 2 + 3i$. Alors $\mathrm{Re}(z) = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 3$.

Remarque 1. • On a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
• Au vu de la construction des nombres complexes, on peut donc représenter les nombres complexes comme l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$, le nombre complexe $a + ib$ étant identifié au point (a, b).
• Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$z = z' \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')).$$

Proposition 1

Soit $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{C}$. Alors

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.$$

Définition 2: Imaginaire pur

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.
Ainsi, z est un imaginaire pur si $z = i\mathrm{Im}(z)$.
On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Remarque 2. Si on représente géométriquement l'ensemble des nombres complexes comme les points de $\mathbb{R}^2$, les imaginaires purs sont les points situés sur l'axe des ordonnées.
Remarquons que $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

7.1.2 Propriétés

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$. En utilisant l'écriture algébrique des nombres complexes, l'addition et la multiplication s'écrivent :

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib) = \underbrace{(a + a')}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(b + b')}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{C}$$

et

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = \underbrace{(aa' - bb')}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(ab' + a'b)}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{C}.$$

On remarque que l'addition et la multiplication de deux nombres complexes sont des nombres complexes.

Ces deux écritures sont naturelles : en effet, la première est celle qu'on écrirait naturellement et la deuxième découle du fait que $i^2 = -1$ puisque si on développe le produit comme on le ferait pour des nombres réels, on a

$$z \times z' = (a+ib) \times (a'+ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Enfin, comme pour les nombres réels, on note très souvent (quasiment toujours, en fait) zz' au lieu de $z \times z'$.

Exemple 2. • $(1-2i)(6+i) = (1 \times 6 - (-2) \times 1) + i(1 \times 1 - 2 \times 6) = 8 - 11i$.

Proposition 2

L'addition et la multiplication des nombres complexes vérifient les propriétés suivantes :

1. L'addition est associative et commutative. Elle admet 0 pour élément neutre. De plus, tout nombre complexe $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ admet $-z = -\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$ pour opposé pour la loi $+$.
2. La multiplication est associative et commutative. Elle admet 1 pour élément neutre. De plus, tout nombre complexe non nul $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ admet
$$\frac{1}{z} = \frac{\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$
pour inverse pour la loi $\times$.
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Démonstration.

1. Soient $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$. On a déjà vu que
$$(a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b+b') = (a'+a) + i(b'+b) = (a'+ib') + (a+ib)$$
donc l'addition est commutative.
Soit $(a'', b'') \in \mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned} ((a+ib) + (a'+ib')) + (a''+ib'') &= ((a+a') + i(b+b')) + (a''+ib'') \\ &= (a+a'+a'') + i(b+b'+b'') \\ &= (a+ib) + ((a'+a'') + i(b'+b'')) \\ &= (a+ib) + ((a'+ib') + (a''+ib'')), \end{aligned}$$
ce qui prouve que l'addition est associative.
Par définition de l'addition, on a
$$a + ib + 0 = (a+0) + ib = a + ib = (0+a) + ib = 0 + a + ib$$
donc 0 est bien l'élément neutre de l'addition.
Enfin, $(a+ib) + (-a-ib) = (a-a) + i(b-b) = 0$ donc $-a-ib$ est bien l'opposé de $a+ib$.
2. Soient $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$. On a déjà vu que
$$(a+ib)(a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) = (a'a - b'b) + i(b'a + a'b) = (a'+ib')(a+ib),$$
donc la multiplication est commutative.

Soit $(a'', b'') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
[(a+ib)(a'+ib')](a''+ib'') &= [(aa'-bb')+i(a'b+ab')](a''+ib'') \\
&= (aa'-bb')a''-(a'b+ab')b''+i((aa'-bb')b''+(a'b+ab')a'') \\
&= aa'a''-a''bb'-a'bb''-ab'b''+i(aa'b''-bb'b''+a'a''b+aa''b') \\
&= a(a'a''-b'b'')-b(a''b'+a'b'')+i(a(a'b''+a''b')+b(a'a''-b'b'')) \\
&= (a+ib)[(a'a''-b'b'')+i(a''b'+a'b'')] \\
&= (a+ib)[(a'+ib')(a''+ib'')],
\end{aligned}$$

ce qui assure l'associativité de la multiplication.
Par définition de la multiplication, on a

$$(a+ib)\times 1 = (a+ib)\times(1+0i) = a+ib = (1+0i)\times(a+ib) = 1\times(a+ib),$$

donc 1 est bien l'élément neutre de la multiplication.
Supposons que $a+ib \neq 0$, ce qui implique que $(a,b) \neq (0,0)$, de telle sorte que $a^2+b^2 \neq 0$.
Alors on a

$$\frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)(a+ib) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$$

donc l'inverse de $z = a+ib$ pour la loi $\times$ est bien $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

3. Soient $(a, a', a'', b, b', b'') \in \mathbb{R}^6$. On a

$$\begin{aligned}
(a+ib)[(a'+ib')+(a''+ib'')] &= (a+ib)(a'+a''+i(b'+b'')) \\
&= a(a'+a'')-b(b'+b'')+i(a(b'+b'')+b(a'+a'')) \\
&= aa'+aa''-bb'-bb''+i(ab'+ab''+ba'+ba'') \\
&= [aa'-bb'+i(ab'+a'b)]+[aa''-bb''+i(ab''+a''b)] \\
&= (a+ib)(a'+ib')+(a+ib)(a''+ib''),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

■

Exemple 3.

$$\frac{1}{i} = -i.$$

En effet, $(-i)\times i = -i^2 = -(-1) = 1$.
Notons que $i^3 = i^2 \times i = -i, i^4 = i^3 \times i = -i \times i = 1, i^5 = i, i^6 = -1$...

Remarque 3. • On peut résumer toutes ces propriétés en disant que $\mathbb{C}$ est un corps.
• Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $zz' = 0$. Alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

En effet, si $z = 0$, c'est fini. Supposons que $z \neq 0$. On peut donc multiplier zz' par $\dfrac{1}{z}$ et on obtient :

$$\frac{1}{z}(zz') = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}z\right)z' = 0 \Rightarrow z' = 0.$$

• Il y a bien unicité de l'opposé de z.
Supposons que $z + z' = z + z'' = 0$.
Alors $z' = z' + (z + z'') = (z' + z) + z'' = z''$.
• Si $z \neq 0$, il y a bien unicité de l'inverse de z. Supposons que $zz' = z'z = zz'' = z''z = 1$.
Alors $z' = z'(zz'') = (z'z)z'' = z''$.
• Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$, $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

• Le produit de deux imaginaires purs est un réel.
En effet, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $ia \times ib = -ab \in \mathbb{R}$.

• Toutes les règles usuelles de calcul vues sur $\mathbb{R}$ s'étendent naturellement à celles de $\mathbb{C}$, notamment celles sur les fractions et les puissances.

Ceci nous permet de prouver la propriété qu'on souhaitait et qui est la raison d'être de $\mathbb{C}$: pour tout nombre réel négatif a, il existe un nombre complexe dont le carré vaut a.

En effet, $(i\sqrt{-a})^2 = i^2\sqrt{-a}^2 = (-1) \times (-a) = a$.

De même, $(-i\sqrt{-a})^2 = (-i)^2\sqrt{-a}^2 = (-1) \times (-a) = a$.

Ainsi, tout nombre réel non nul admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$. On peut se demander si tout nombre complexe admet une racine carrée dans $\mathbb{C}$. On verra plus loin que c'est également le cas.

Exemple 4.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i.$$

On remarque que $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = i$.

Proposition 3

Soient $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}(\lambda z + z') = \lambda\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\lambda z + z') = \lambda\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$

Remarque 4. On dit que les fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Re}(z) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Im}(z) \end{array}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires.

Démonstration. Soient $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda z + z' = \lambda(\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)) + \mathrm{Re}(z') + i\mathrm{Im}(z') = (\lambda\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')) + i(\lambda\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')).$$

Par unicité des parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on en déduit par identification que

$$\mathrm{Re}(\lambda z + z') = \lambda\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\lambda z + z') = \lambda\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$

■

Remarque 5. Plus généralement, pour tous nombres complexes $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, et pour tous réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{Re}(z_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{Im}(z_k).$$

7.2 Représentation géométrique des nombres complexes

7.2.1 Affixe d'un point, d'un vecteur

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 3: Affixe

• Soit (x, y) un point du plan.
On appelle affixe du point (x, y) le nombre complexe $z = x + iy$.
• Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
On appelle affixe du vecteur $\vec{u}$ le nombre complexe $z = x + iy$.

Remarque 6. • Tout point situé sur l'axe des abscisses (resp.ordonnées) a pour affixe un nombre réel (resp. imaginaire pur).

• Tout vecteur colinéaire à $\vec{i}$ (resp. à $\vec{j}$) a pour affixe un nombre réel (resp. imaginaire pur).

Exemple 5. Le point M situé sur le cercle trigonométrique de telle sorte que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \dfrac{\pi}{3}$ a pour affixe le nombre complexe $z = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) + i\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque 7. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$. Soient M et M' les points du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') (de telle sorte que z et z' soient les affixes respectives de M et M'). Ainsi on a les vecteurs

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

On a $z + z' = (x + x') + i(y + y')$. Soit M'' le point du plan ayant pour affixe $z + z'$. Ses coordonnées sont donc $(x + x', y + y')$. Le vecteur $\overrightarrow{OM''}$ a donc pour coordonnées

$$\overrightarrow{OM''}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}.$$

Ainsi, la somme des deux nombres complexes $z + z'$ est l'affixe du point M'' tel que $\overrightarrow{OM''}$ est la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ où M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'.

La somme de deux nombres complexes s'interprète donc géométriquement comme une somme de deux vecteurs.

Proposition 4

Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.
Alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.

Démonstration. Soient $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
Par définition, les points M et M' ont pour coordonnées respectives (a, b) et (a', b').
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \end{pmatrix}$ et donc pour affixe

$$a' - a + i(b' - b) = z' - z.$$

■

Remarque 8. Soit a un nombre complexe. L'application définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto z + a$ correspond géométriquement à la translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

7.2.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 4: Conjugué d'un nombre complexe

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$, noté $\overline{z}$, est défini par

$$\overline{z} = a - ib.$$

Remarque 9.

$$\overline{z} = 0 \Leftrightarrow a - ib = 0 \Leftrightarrow (a,b) = (0,0) \Leftrightarrow a + ib = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Exemple 6. • $\overline{2+3i} = 2 - 3i$.
• $\overline{5} = 5$.
• $\overline{i} = -i$.

Remarque 10. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit M le point du plan d'affixe z. Le point M' du plan ayant pour affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
En effet, M a pour coordonnées (a,b) tandis que M' a pour coordonnées $(a,-b)$.

Proposition 5: Propriétés du conjugué

Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a
1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
3. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
4. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
5. Si $z \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Démonstration. On note $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $(a,a',b,b') \in \mathbb{R}^4$, de telle sorte que $\overline{z} = a - ib$ et $\overline{z'} = a' - ib'$.
1. $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
2. On a
$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{(a+ib)+(a-ib)}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$$
et
$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{(a+ib)-(a-ib)}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \mathrm{Im}(z).$$
3. On a
$$\overline{z+z'} = \overline{(a+a')+i(b+b')} = a + a' - i(b+b') = a - ib + a' - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$$
et
$$\overline{z \times z'} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b) = (a - ib)(a' - ib') = \overline{z} \times \overline{z'}.$$
4. Supposons que $z \neq 0$.
D'après la propriété précédente, on a
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \times \overline{z} = \overline{\left(\frac{1}{z} \times z\right)} = \overline{1} = 1$$

d'où $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
On en déduit que si $z' \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
   Pour $n = 0$, on a $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = (\overline{z})^0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Alors

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1},$$

   ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
   Etendons cette propriété aux entiers relatifs strictement négatifs. Soit $n \in \mathbb{Z}$, avec $n < 0$.
   Alors $-n \in \mathbb{N}^*$ donc

$$\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{(\overline{z})^{-n}} = \overline{z}^n,$$

   donc finalement la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

■

Remarque 11. On peut généraliser ces propriétés.
Pour tous nombres complexes $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

et

$$\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}.$$

Corollaire 1: Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
2. z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Démonstration.

1. On a les équivalences :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z - \overline{z}}{2i} = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z.$$

2. On a les équivalences :

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z + \overline{z}}{2} = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z.$$

■

7.2.3 Module d'un nombre complexe

Définition 5: Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle module du nombre complexe z, et on note $|z|$ le nombre défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque 12. On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| \in \mathbb{R}_+$.
De plus, si z est réel, le module de z et la valeur absolue de z coïncident.
En effet, si $z = a + 0i$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Exemple 7. • $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
•$|-4+6i| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Proposition 6

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit M le point du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'affixe est z.
Alors
$$|z| = OM.$$

Démonstration. En effet, si $z = a+ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc sa longueur est

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

■

Remarque 13. Ainsi, pour tout nombre complexe z, le module de z s'interprète comme la distance à l'origine du point du plan d'affixe z.

Proposition 7

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.
Alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.
Ainsi, $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. ■

Remarque 14. Ceci est une propriété fondamentale du module, qu'on écrit souvent $|z|^2 = z\overline{z}$. Ainsi, si $z \neq 0$, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},$$

formule qu'on a déjà vue écrite sous la forme $\dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

En particulier, si $|z| = 1$, alors $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Proposition 8: Propriétés du module

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

1. $|\overline{z}| = |z|$;
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
3. $|zz'| = |z||z'|$;
4. Si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
5. Si $z \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$;
6. $\max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$;
7. (Inégalité triangulaire) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement s'il existe un réel positif $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \alpha z'$ ou $z' = \alpha z$.
8. $|z - z'| \leq |z| + |z'|$.

Démonstration.
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.

1. On a
$$|\overline{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$
2. On a $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$. Or, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, donc finalement
$$|z| = 0 \Leftrightarrow (a^2, b^2) = (0, 0) \Leftrightarrow (a, b) = (0, 0) \Leftrightarrow z = 0.$$
3. On a
$$|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'|.$$
4. Si $z \neq 0$, on a
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right| = \left|\underbrace{\frac{1}{|z|^2}}_{\in\mathbb{R}_+}\right| |\overline{z}| = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}.$$
Si $z' \neq 0$, on a
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = |z| \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}.$$
5. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $z \neq 0$, on a
$$|z^n| = \sqrt{z^n\overline{z^n}} = \sqrt{z^n\overline{z}^n} = \sqrt{(z\overline{z})^n} = (\sqrt{z\overline{z}})^n = |z|^n.$$
6. Montrons que $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.
On a $a^2 \leq a^2 + b^2$ donc $\mathrm{Re}(z)^2 \leq |z|^2$.
En prenant la racine carrée, on obtient $\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} \leq \sqrt{|z|^2}$, i.e. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.
On montre de même que $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$. En combinant les deux inégalités, ceci donne $\max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \leq |z|$.
D'autre part, on a
$$(|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 \geq a^2 + b^2 = |z|^2.$$
Par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, ceci implique que
$$\sqrt{(|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2} \geq \sqrt{|z|^2},$$
i.e. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \geq |z|$, d'où le résultat.

7. • On a

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} \\ &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \\ &= z\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z'}+z'\overline{z} \\ &= |z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}} \\ &= |z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \\ &\leq |z|^2+|z'|^2+2|z\overline{z'}| \\ &\leq |z|^2+|z'|^2+2|z||\overline{z'}| \\ &\leq |z|^2+|z'|^2+2|z||z'| \\ &\leq (|z|+|z'|)^2. \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, puisque $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$ sont des nombres positifs, on obtient

$$|z+z'| \leq |z|+|z'|.$$

• Intéressons-nous désormais au cas d'égalité.
Si $z'=0$, on a bien égalité dans l'inégalité triangulaire et $z'=0z$.
Supposons dorénavant que $z' \neq 0$ et montrons que $|z+z'|=|z|+|z'|$ si et seulement s'il existe un réel positif $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z=\alpha z'$.
En effet, on voit dans la preuve de l'inégalité triangulaire qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Re}(z\overline{z'})=|z\overline{z'}|$, c'est à dire si et seulement si $z\overline{z'}$ est un réel positif. Notons $\beta = z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$.
En multipliant par z', on trouve $zz'\overline{z'} = \beta z' \Leftrightarrow z|z'|^2=\beta z' \Leftrightarrow z=\dfrac{\beta}{|z'|^2}z'$ (on peut diviser par $|z'|^2 \neq 0$ car $z' \neq 0$). En posant $\alpha = \dfrac{\beta}{|z'|^2}$, on a bien $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $z=\alpha z'$.
Réciproquement, s'il existe un réel positif $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z=\alpha z'$, on a

$$|z+z'|=|(\alpha+1)z'|=|\alpha+1||z'|=(\alpha+1)|z'|=\alpha|z'|+|z'|=|\alpha z'|+|z'|=|z|+|z'|.$$

8. En remplaçant z' par $-z'$, on obtient la deuxième inégalité.

■

Remarque 15. • On a $|z|=|\mathrm{Re}(z)| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et $|z|=\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$.
De même, on a $|z|=|\mathrm{Im}(z)| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
• On peut généraliser ces propriétés : pour tous nombres complexes $(z_1,\dots,z_n)$, alors

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$$

et

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

• Comme pour la valeur absolue, on déduit de l'inégalité triangulaire que pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$,

$$||z|-|z'|| \leq |z-z'| \quad \text{et} \quad ||z|-|z'|| \leq |z+z'|.$$

• Pour tout nombre complexe z non nul, $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1. En effet, si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Proposition 9

Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.
Alors la longueur MM' vérifie
$$MM' = |z' - z|.$$

Démonstration. Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$. Les points M et M' ont pour coordonnées respectives (a, b) et (a', b').

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \end{pmatrix}$ donc on a

$$MM' = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2} = |(a' - a) + i(b' - b)| = |z' - z|.$$

■

Remarque 16. Soit M un point du plan d'affixe z_M, soit r un réel strictement positif.

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - z_M| = r\}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre M et de rayon r.

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - z_M| \leqslant r\}$ est l'ensemble des affixes des points du disque de centre M et de rayon r.

Corollaire 2: Module et distance

Comme la valeur absolue, le module vérifie les propriétés d'une distance, à savoir :

1. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z' - z| = 0 \Leftrightarrow z = z'$.
2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z' - z| = |z - z'|$.
3. $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, |z' - z| \leq |z' - z''| + |z'' - z|$.

Démonstration. Ces propriétés découlent directement des propriétés du module montrées ci-dessus.

1. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
   On a
   $$|z' - z| = 0 \Leftrightarrow z' - z = 0 \Leftrightarrow z = z'.$$
2. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors
   $$|z' - z| = |-(z - z')| = |-1||z - z'| = |z - z'|.$$
3. Soient $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$. D'après l'inégalité triangulaire, on a
   $$|z' - z| = |(z' - z'') + (z'' - z)| \leq |z' - z''| + |z'' - z|.$$

■

7.2.4 Formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes

Définition 6: Exponentielle d'un imaginaire pur

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $e^{i\theta}$ par
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Exemple 8. •$e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$. (Ceci est cohérent avec $e^0 = 1$).
- $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
- $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.
- $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$.
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$.

Remarque 17. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$e^{i\theta} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi]$$

et

$$e^{i\theta} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Proposition 10: Caractérisation des nombres complexes de module 1

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}.$$

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, i.e.

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Alors $|z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$.
Réciproquement, supposons que $|z| = 1$.
Soit M le point du plan d'affixe z. Alors $OM = 1$, c'est à dire que le point M se situe sur le cercle trigonométrique. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées du point M soient $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Ainsi, l'affixe du point M est $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, d'où $z = e^{i\theta}$. ■

Remarque 18. • Il y a donc une identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
• Il est surtout important de retenir que $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1$. En particulier, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \neq 0$.

Proposition 11: Propriétés de l'exponentielled'un imaginaire pur

L'exponentielle d'un imaginaire pur vérifie les propriétés suivantes :
1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}, e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$.
2. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
4. (Formule de Moivre) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, i.e.

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration.
1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{Z}$. Par 2π-périodicité des fonctions cosinus et sinus, on a

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

De même, soit $\theta' \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\theta') + i\sin(\theta') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \cos(\theta) & = & \cos(\theta') \\ \sin(\theta) & = & \sin(\theta') \end{array}\right. \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi].$$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par parité de la fonction cosinus et imparité de la fonction sinus, on a

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

Par ailleurs, on a $e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = |e^{i\theta}|^2 = 1$ d'où en divisant par $e^{i\theta}$ qui n'est jamais nul, $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
Pour $n = 0$, on a $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. On a alors

$$(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta},$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$.
D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il reste à la vérifier pour tout entier strictement négatif.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$. Alors $-n \in \mathbb{N}$ donc

$$(e^{i\theta})^n = \frac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta}.$$

■

Remarque 19. • Autrement dit, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) = \sin(n\theta).$$

• Ces propriétés justifient la notation $e^{i\theta}$ puisque les propriétés ci-dessus sont analogues à celles de l'exponentielle réelle, à savoir pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Exemple 9. • Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$.
En effet, $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i\theta}e^{i\pi} = -e^{i\theta}$.
• On retrouve que $i^2 = (e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = e^{\frac{2i\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$.
• Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5) \\ &= \mathrm{Re}(\cos^5\theta + 5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) + i\sin^5(\theta)) \\ &= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) \\ &= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + 5\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta))^2 \\ &= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta) + 10\cos^5(\theta) + 5\cos(\theta)(1 - 2\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta)) \\ &= 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta). \end{aligned}$$

On peut par exemple vérifier avec cette formule appliquée à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ que

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Corollaire 3

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$.

Démonstration. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha}e^{-i\beta} = e^{i\alpha} \times \frac{1}{e^{i\beta}} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}.$$

■

Proposition 12: Formules d'Euler

Pour tout réel θ, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$ donc

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

■

Remarque 20. Ces formules seront utiles pour linéariser des expressions, comme nous le verrons par la suite.

Exemple 10. Un exemple d'utilisation fréquent de ces formules est le suivant.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la méthode de l'angle moitié, on obtient :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

et

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}) = 2ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

En particulier, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$1 + e^{i\theta} = e^0 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

et

$$1 - e^{i\theta} = e^0 - e^{i\theta} = -2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Corollaire 4

Soient $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.
On a :

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
2. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
3. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
4. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Démonstration. On utilise la technique de l'angle moitié.

1.
$$\cos(p) + \cos(q) = \mathrm{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = \mathrm{Re}\left(2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
2.
$$\cos(p) - \cos(q) = \mathrm{Re}(e^{ip} - e^{iq}) = \mathrm{Re}\left(2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
3.
$$\sin(p) + \sin(q) = \mathrm{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = \mathrm{Im}\left(2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
4.
$$\sin(p) - \sin(q) = \mathrm{Im}(e^{ip} - e^{iq}) = \mathrm{Im}\left(2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

■

Proposition 13: Existence de la forme exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Démonstration. On a déjà vu que $\frac{z}{|z|}$ est de module 1. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, d'où $z = |z|e^{i\theta}$. ■

Définition 7: Forme exponentielle et forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
On dit que θ est un argument de z et on note
$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi].$$

L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ s'appelle forme exponentielle du nombre complexe z.
En utilisant que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on obtient la forme trigonométrique du nombre complexe z, i.e.
$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Remarque 21. • Soit $z \in \mathbb{C}^*$, soit M le point du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'affixe z. En fait, on a $\arg(z) \equiv (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$.

• Si θ est un argument de z, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}, \theta + 2k\pi$ est également un argument de z puisque

$$|z|e^{i(\theta+2k\pi)} = |z|e^{i\theta} = z.$$

Exemple 11. • $\arg(i) = \arg(e^{i\frac{\pi}{2}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

• $\mathbb{R}_+^* = \{z \in \mathbb{C}^*, \arg(z) \equiv 0[2\pi]\}$ et $\mathbb{R}_-^* = \{z \in \mathbb{C}^*, \arg(z) \equiv \pi[2\pi]\}$.

• Soit $z = 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{2}$ donc $\frac{z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, l'écriture sous forme exponentielle de z est $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Proposition 14:

Soient $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.
Alors

$$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \rho & = & \rho' \\ \theta & \equiv & \theta'[2\pi]. \end{array} \right.$$

Démonstration. L'implication $\left\{ \begin{array}{lll} \rho & = & \rho' \\ \theta & \equiv & \theta'[2\pi]. \end{array} \right. \Rightarrow \rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ est immédiate.

Montrons la réciproque. Supposons que $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$.

Ceci implique que $\frac{\rho}{\rho'} = e^{i(\theta'-\theta)}$. En particulier $e^{i(\theta'-\theta)} \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc nécessairement $\theta' - \theta \equiv 0[2\pi]$, i.e. $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

On en déduit que $\frac{\rho}{\rho'} = e^{i(\theta'-\theta)} = 1$, d'où $\rho = \rho'$. ■

Remarque 22. Ceci signifie que l'écriture d'un nombre complexe z non nul sous forme exponentielle est unique si on impose $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$ par exemple.

Autrement dit, si un nombre complexe s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, alors on peut affirmer que $\rho = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

Exemple 12. Soit $z = -2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Puisque $-2 < 0$, on n'a pas $-2 = |z|$. En revanche, en utilisant que $-1 = e^{i\pi}$, on a

$$z = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})} = 2e^{7i\frac{\pi}{6}}.$$

On a alors $|z| = 2$ et $\arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$.

Proposition 15

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}.$$

Démonstration. Ecrivons z sous forme trigonométrique :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta).$$

On en déduit que $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$ d'où le résultat en divisant par $|z|$. ■

Exemple 13. Soit $z = \sqrt{3} - i$. On a $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ d'où

$$\cos(\arg(z)) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\arg(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = -\frac{1}{2}.$$

Ceci nous permet d'affirmer que $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Finalement, $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Proposition 16: Propriétés de l'argument

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors
$$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi].$$
2. Soient $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$. Alors
$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi].$$
3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi].$$

Démonstration.

1. Ecrivons z sous forme exponentielle, i.e. $z = |z|e^{i\theta}$.
   Alors $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$ ce qui est l'écriture sous forme exponentielle de $\overline{z}$ d'où
   $$\arg(\overline{z}) \equiv -\theta[2\pi],$$
   i.e. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.
   De même, on a $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}$, ce qui est l'écriture sous forme exponentielle de $\frac{1}{z}$ d'où $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\theta[2\pi]$, i.e. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.
2. Soient $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$ les écritures sous formes exponentielles de z et z'. Alors les écritures en formes exponentielles de zz' et $\frac{z}{z'}$ sont
   $$zz' = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}e^{i(\theta-\theta')}$$
   d'où $\arg(zz') \equiv \theta + \theta'[2\pi]$, i.e. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \theta - \theta'[2\pi]$, i.e. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.
3. Soit $z = |z|e^{i\theta}$ l'écriture sous forme exponentielle de z.
   Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ qui est l'écriture sous forme exponentielle de z^n.
   Ainsi, $\arg(z^n) \equiv n\theta \equiv n\arg(z)[2\pi]$.

■

Exemple 14. Soient $z = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z' = \pi e^{-i\frac{\pi}{7}}$. Ainsi, $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$ et $\arg(z') \equiv -\frac{\pi}{7}[2\pi]$.

- $\arg(zz') \equiv \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{7} \equiv \frac{2\pi}{35}[2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{7} \equiv \frac{12\pi}{35}[2\pi]$.
- $\arg(z^{15}) \equiv 15 \times \frac{\pi}{5} \equiv 3\pi \equiv \pi[2\pi]$.

Remarque 23. Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$, on a

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{i},\vec{v})} - \widehat{(\vec{i},\vec{u})} \equiv \arg(z_{\vec{v}}) - \arg(z_{\vec{u}}) [2\pi] \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) [2\pi]$$

où $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ sont les affixes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En particulier, soient A, B et C trois points d'affixes a, b, c.

On a $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$ donc les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est réel et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

7.2.5 Linéarisation de $\cos^p(x)\sin^q(x)$

A l'aide des formules d'Euler, on peut facilement linéariser des expressions de la forme $\cos^p(x)\sin^q(x)$, c'est à dire les exprimer uniquement en fonction de facteurs de la forme $\cos(px)$ ou $\sin(qx)$.

Aurement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\cos^p(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p \quad \text{et} \quad \sin^q(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q.$$

Il ne reste plus qu'à développer en utilisant la formule du binôme de Newton ! Par exemple, pour $p = q = 2$, on a

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2e^{ix}e^{-ix}) = \frac{1}{4}(2\cos(2x) + 2) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

et

$$\sin^2(x) = -\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2e^{ix}e^{-ix}) = -\frac{1}{4}(2\cos(2x) - 2) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

On retrouve deux formules déjà vues dans le chapitre « Trigonométrie ».

Exemple 15.

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$$

et

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{8i}(2i\sin(3x) - 6i\sin(x)) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}.$$

7.3 Application aux équations du second degré

7.3.1 Equations du second degré à cœfficients réels

On peut maintenant compléter l'étude des trinômes du second degré vus dans le chapitre « Nombres réels ».

Proposition 17: Trinômes du second degré

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.
Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$.
On appelle discriminant de l'équation (E) le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
Il y a trois cas :

- Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles (ou racines) distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une seule solution (ou racine double)

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. Les cas où $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$ ont déjà été traités dans le chapitre « Nombres réels ».

On avait notamment mis l'équation sous forme canonique à savoir

$$(E) \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0.$$

Supposons que $\Delta < 0$. Alors $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$. On a donc

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a\left(x + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.
\end{aligned}$$

On remarque que les solutions sont bien des nombres complexes conjugués. ■

Exemple 16. Cherchons les nombres complexes dont le cube vaut 1, i.e. résolvons l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$(E) : x^3 - 1 = 0.$$

$x = 1$ est une solution évidente de (E). On peut donc factoriser cette équation par $x - 1$ et on obtient

$$(E) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Notons (E') l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. C'est un trinôme du second degré à cœfficients $a = b = c = 1$ réels.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$.

D'après la proposition précédente, les racines de (E') sont

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

On note souvent $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

On peut vérifier que
$$j^3 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^3 = e^{3\times\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$$
et
$$\overline{j}^3 = (e^{-\frac{2i\pi}{3}})^3 = e^{-3\times\frac{2i\pi}{3}} = e^{-2i\pi} = 1.$$

Ainsi, $1, j$ et $\overline{j}$ sont les trois nombres complexes dont les cubes valent 1 : on les appelle les racines cubiques de l'unité.

On remarque également que $j^2 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j}$ et puisque j est racine de (E'),
$$1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 0.$$

Comme dans le chapitre « Nombres réels », on a démontré le corollaire suivant

Corollaire 5

Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. Notons x_1 et x_2 les racines de (E), éventuellement complexes (avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas où $\Delta = 0$).
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Démonstration. Le cas où $\Delta \geq 0$ a été traité dans le chapitre « Nombres réels ».
Si $\Delta < 0$, on a mis en évidence la forme factorisée dans la preuve ci-dessus. ■

Enfin, en faisant la même preuve que dans le chapitre « Nombres réels », on a les relations cœfficients-racines, valables quel que soit le signe du discriminant.

Corollaire 6: Relations cœfficients-racines

Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. Notons x_1 et x_2 les racines de (E), éventuellement complexes (avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas où $\Delta = 0$).
On a les relations suivantes entre les cœfficients et les racines du trinôme :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

7.3.2 Résolution de l'équation $x^2 = a$, avec $a \in \mathbb{C}$

Dans cette section, on s'intéresse à un type de trinôme du second degré à cœfficients complexes.

Etant donné $a \in \mathbb{C}$, on cherche les nombres complexes x tels que $x^2 = a$, c'est à dire les « racines carrées »de a en quelque sorte.

Si $a = 0$, la seule solution de l'équation $x^2 = a$ est évidemment $x = 0$.

Sinon, on a la proposition suivante :

Proposition 18: Racines carrées complexes

Soit $a = |a|e^{i\arg(a)} \in \mathbb{C}^*$.
Alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions complexes :
$$x_1 = \sqrt{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{2}} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{2}}.$$

Démonstration. Cherchons une solution $x \in \mathbb{C}$ écrite sous forme exponentielle, i.e.
$$x = |x|e^{i\arg(x)}.$$

Si x est solution, on a $x^2 = a$, i.e.

$$|x|^2 e^{2i\arg(x)} = |a| e^{i\arg(a)}.$$

D'après la proposition 14, ceci équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ccc} |x|^2 & = & |a| \\ 2\arg(x) & \equiv & \arg(a)[2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} |x| & = & \sqrt{|a|} \ \ (\text{car } |x| > 0) \\ \arg(x) & \equiv & \dfrac{\arg(a)}{2}[\pi] \end{array}\right.$$

On a donc deux solutions :

$$x_1 = \sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}}$$

et

$$x_2 = \sqrt{|a|} e^{i(\frac{\arg(a)}{2}+\pi)} = \sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}} e^{i\pi} = -\sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}}.$$

Réciproquement, on vérifie que

$$x_1^2 = (\sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}})^2 = |a| e^{i\arg(a)} = a$$

et que

$$x_2^2 = (-\sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}})^2 = |a| e^{i\arg(a)} = a.$$

■

Remarque 24. On remarque cette fois-ci que les solutions sont opposées.

Exemple 17. Les solutions de l'équation $x^2 = 25e^{i\frac{\pi}{8}}$ sont

$$x_1 = 5e^{i\frac{\pi}{16}} \quad \text{et} \quad x_2 = -5e^{i\frac{\pi}{16}}.$$

Remarque 25. Maintenant qu'on sait que les solutions d'une équation de la forme $x^2 = a$ sont opposées, on peut également les chercher sous forme algébrique lorsque la recherche sous forme exponentielle est compliquée.

Exemple 18. Résolvons l'équation $z^2 = -5 + 12i$

On cherche z sous la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a alors $z^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -5 + 12i$ d'où par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & -5 \\ 2xy & = & 12. \end{array}\right.$$

Par ailleurs, $z^2 = -5 + 12i \Rightarrow |z^2| = |-5 + 12i| \Rightarrow |z|^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 13$.

Ainsi, $2x^2 = (x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = -5 + 13 = 8$ d'où $x^2 = 4$ i.e. $x = 2$ ou $x = -2$.

Si $x = 2$, puisque $2xy = 12$, on a $4y = 12$ d'où $y = 3$, ce qui fournit la solution $z = 2 + 3i$.

Si $x = -2$, puisque $2xy = 12$, on a $-4y = 12$ d'où $y = -3$, ce qui fournit la solution $z = -2 - 3i$.

Réciproquement, on vérifie qu'on a bien $(2 + 3i)^2 = (-2 - 3i)^2 = -5 + 12i$.

7.3.3 Equations du second degré à cœfficients dans $\mathbb{C}$

Proposition 19: Equations du second degré à cœfficients dans $\mathbb{C}$

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Soit δ une racine carrée de Δ, i.e. un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.
Les solutions complexes du trinôme du second degré

$$(E) : ax^2 + bx + c = 0$$

sont $x_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ avec éventuellement $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$.

Démonstration. Repartions de la forme canonique

$$(E) \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0.$$

Puisque $\delta^2 = \Delta$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a\left(x + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\delta}{2a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\delta}{2a}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 26. • Dans le cas où (E) est à cœfficients réels et où $\Delta < 0$, on retrouve bien les solutions données avant car les racines carrées d'un nombre réel $\Delta < 0$ sont $\delta_1 = i\sqrt{-\Delta}$ et $\delta_2 = -i\sqrt{-\Delta}$.

• L'enjeu est donc de trouver une racine carrée du discriminant, ce qu'on sait faire grâce à la section précédente.

Exemple 19. Soit $(E) : x^2 - 2ix + 2 - 4i$.
On a $\Delta = (-2i)^2 - 4(2-4i) = -4 - 8 + 16i = -12 + 16i$.
Cherchons $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ sous la forme $\delta = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a alors $(a+ib)^2 = -12 + 16i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= -12 \\ 2ab &= 16 \end{cases}$
Par ailleurs, $a^2 + b^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{(-12)^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$.
Ainsi, on a

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= -12 \\ 2ab &= 16 \\ a^2 + b^2 &= 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= 4 \\ b^2 &= 16 \\ ab &= 8 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = 2 + 4i \quad \text{ou} \quad (a, b) = -2 - 4i.$$

On peut donc poser $\delta = 2 + 4i$ et on obtient que les deux solutions de (E) sont

$$x_1 = \frac{2i - (2+4i)}{2} = -1 - i \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2i + (2+4i)}{2} = 1 + 3i.$$

On retrouve une nouvelle fois les relations cœffcients-racines.

Corollaire 7: Relations cœfficients-racines

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$.
Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$.
Soient x_1 et x_2 les solutions complexes de E.
Alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 & = & \frac{c}{a} \end{array} \right. .$$

7.4 Racines n-ièmes

7.4.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 8: Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'un nombre complexe z est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité, i.e.

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}.$$

Exemple 20. • $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.
•$\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.
• $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
• $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 20: Description des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\} = \{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Démonstration. Soit $z = |z| e^{i \arg(z)} \in \mathbb{C}^*$. On a les équivalences suivantes :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow |z|^n e^{in \arg(z)} = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^n & = & 1 \\ n \arg(z) & \equiv & 0[2\pi] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \quad \text{car } |z| > 0 \\ \arg(z) & \equiv & 0[\frac{2\pi}{n}] \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à l'existence d'un entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. ∎

Remarque 27. • On remarque que $\mathrm{Card}(\mathbb{U}_n) = n$.
• Les racines n-ièmes sont donc des nombres complexes de module 1. En particulier, l'inverse d'une racine n-ième de l'unité est son conjugué.
Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$\overline{\omega^k} = \dfrac{1}{\omega^k} = \dfrac{\omega^n}{\omega^k} = \omega^{n-k}$.

Exemple 21. • $\mathbb{U}_5 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}\}$.
• $\mathbb{U}_6 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, e^{\frac{6i\pi}{6}}, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}}\} = \{1, e^{\frac{i\pi}{3}}, j, -1, j^2, e^{\frac{5i\pi}{3}}\}$.

Remarque 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a la factorisation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k).$$

Proposition 21: Propriétés des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geqslant 2$. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a alors $\mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
On a les deux propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1}$.

Démonstration.

1. On connaît la factorisation $z^n - 1 = (z-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ valable pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   Ainsi, $0 = \omega^n - 1 = (\omega - 1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$.

   Puisque $\omega - 1 \neq 0$ (car $n \neq 1$) on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = 0$.

2. On a
$$\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{\frac{(n-1)n}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

■

Remarque 29. A retenir : la somme des n racines n-ièmes de l'unité est toujours nulle (si $n \geqslant 2$).

En effet, $1 + (-1) = 0, 1 + j + j^2 = 0, 1 + i + (-1) + (-i) = 0$, etc...

Proposition 22: Représentation géométrique des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega = e^{i\frac{2i\pi}{n}}$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note M_k le point d'affixe ω^k.
Les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ forment les n sommets d'un polygone régulier convexe inscrit dans le cercle unité, le sommet Z_0 étant le point d'affixe 1.

Démonstration. Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, on a

$$M_kM_{k+1} = |\omega^{k+1} - \omega^k| = |e^{\frac{2i\pi(k+1)}{n}} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}| = |e^{\frac{2ik\pi}{n}}(e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1)| = |e^{\frac{2ik\pi}{n}}||e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1| = |e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1|$$

car $|e^{\frac{2ik\pi}{n}}| = 1$ donc $M_0M_1 = M_1M_2 = \cdots = M_{n-2}M_{n-1} = |e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1|$ et

$$|e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1| = |e^{\frac{i\pi}{n}}(e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}})| = |e^{\frac{i\pi}{n}}||2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)| = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

De même,

$$M_{n-1}M_0 = |\omega^0 - \omega^{n-1}| = |1-(e^{\frac{2i\pi}{n}})^{n-1}| = |1-e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}}| = |1-e^{-\frac{2i\pi}{n}}| = |e^{-\frac{2i\pi}{n}}(e^{\frac{2i\pi}{n}}-1)| = |e^{-\frac{2i\pi}{n}}||e^{\frac{2i\pi}{n}}-1|$$

d'où $M_{n-1}M_0 = |e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1|$ donc $M_{n-1}M_0 = M_0M_1 = M_1M_2 = \cdots = M_{n-2}M_{n-1} = L$ avec $L = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, on a

$$(\widehat{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}}) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_{k+1}}}) - (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_k}}) \equiv \arg(\omega^{k+1}) - \arg(\omega^k) \equiv \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi]$$

et

$$(\widehat{\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0}}) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_0}}) - (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_4}}) \equiv \arg(\omega^0) - \arg(\omega^{n-1}) \equiv 0 - \frac{2(n-1)\pi}{n} \equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi].$$

Ainsi,

$$(\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) = \cdots = (\widehat{\overrightarrow{OM_{n-2}}, \overrightarrow{OM_{n-1}}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0}}) = \frac{2\pi}{n}.$$

Ceci prouve que $M_0M_1 \dots M_{n-1}$ est un polygone régulier convexe à n côtés, qui est inscrit dans le cercle unité par propriété des racines n-ièmes de l'unité.

■

7.4.2 Racines n-ièmes d'un nombre quelconque

Définition 9: Racines n-ièmes d'un nombre quelconque

Soit $a \in \mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'un nombre complexe z est une racine n-ième de a si

$$z^n = a.$$

Proposition 23: Description des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Soit $a = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des racines n-ièmes de a est

$$\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Démonstration. Soit $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes :

$$z^n = a \Leftrightarrow r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r^n & = & \rho \\ n\varphi & \equiv & \theta[2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r & = & \rho^{\frac{1}{n}} \\ \varphi & \equiv & \frac{\theta}{n}[\frac{2\pi}{n}] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r & = & \rho^{\frac{1}{n}} \\ \varphi & = & \frac{\theta+2k\pi}{n}, k \in [\![0, n-1]\!] \end{array}\right. .$$

■

Exemple 22. Les racines 5-èmes de $a = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont

$$\{2^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})}, k \in [\![0, 4]\!]\}.$$

Remarque 30. Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On remarque que l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité de a est $\{z_0\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine n-ième de a.

Or, l'application $z \mapsto z_0 z$ est la composée d'une homothétie de rapport $\rho^{\frac{1}{n}}$ et d'une rotation d'angle $\frac{\theta}{n}$.

Puisque les points d'affixe ω^k, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, formaient un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité, cette fois les points d'affixe $z_0\omega^k$ forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\rho^{\frac{1}{n}}$.

7.5 Exponentielle complexe

Définition 10: Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$.
On définit l'exponentielle du nombre complexe z, notée $\exp(z)$ ou e^z, par

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}.$$

Exemple 23. $e^{2-3i} = e^2 e^{-3i} = e^2(\cos(3) - i\sin(3))$.

Proposition 24: Module et arguments d'une exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z).$$

Démonstration.
En effet, $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ donc $e^{\mathrm{Re}(z)} > 0$ et le résultat découle de l'unicité de la forme exponentielle d'un nombre complexe. ∎

Remarque 31. En particulier, on remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}, e^z \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 25: Propriétés de l'exponentielle complexe

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}, \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
2. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}, e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
4. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$.
5. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z' = z + 2ik\pi.$$

Démonstration. Tous ces résultats découlent des propriétés déjà vues.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{e^z} = \overline{e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}} = \underbrace{\overline{e^{\mathrm{Re}(z)}}}_{\in\mathbb{R}} \times \overline{e^{i\mathrm{Im}(z)}} = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{-i\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(\overline{z})} e^{i\mathrm{Im}(\overline{z})} = e^{\overline{z}}.$$

2. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$e^{z+z'} = e^{\mathrm{Re}(z+z')} e^{i\mathrm{Im}(z+z')} = e^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')} e^{i\mathrm{Im}(z)+i\mathrm{Im}(z')} = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)} e^{\mathrm{Re}(z')} e^{i\mathrm{Im}(z')} = e^z e^{z'}.$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a d'après l'alinéa précédent $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$ donc $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
4. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a d'après les deux alinéas précédents,

$$e^{z-z'} = e^z e^{-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}.$$

5. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a les équivalences suivantes :
$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} |e^z| & = & |e^{z'}| \\ \arg(e^z) & \equiv & \arg(e^{z'})[2\pi] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Re}(z) & = & \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) & \equiv & \mathrm{Im}(z')[2\pi] \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z' = z + 2ik\pi$.

■

Remarque 32. La fonction $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donc périodique de période $2i\pi$ et n'est donc pas injective.

En particulier, on a $e^z = 1$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi$.

Proposition 26: Surjectivité de l'exponentielle complexe

L'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective et pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble des antécédents de a par la fonction exponentielle complexe est $\{\ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

On constate que $e^{\ln(|a|)} e^{i \arg(a)} = |a| e^{i \arg(a)} = a$ donc le nombre complexe $z_0 = \ln(|a|) + i \arg(a)$ est un antécédent de a par la fonction exponentielle.

D'après ce qui précède, on a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = a \Leftrightarrow e^z = e^{z_0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = z_0 + 2ik\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi).$$

■

Remarque 33. En particulier, tous les nombres complexes non nuls possèdent une infinité d'antécédents par la fonction exponentielle complexe.