

Corrigé de la liste d'exercices n°5

Dénombrement

Exercice 1. Dénombrons les applications $f : E \longrightarrow F$ surjectives.

Notons $F = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Si $f : E \longrightarrow F$ est surjective, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $x_k \in E$ tel que $f(x_k) = y_k$. Les images des n éléments $x_1, \dots, x_n$ sont donc imposées. Il reste un élément $x_{n+1} \in E$ dont il faut choisir l'image dans F . Cette image $f(x_{n+1})$ aura nécessairement deux antécédents.

Ainsi, si $f : E \longrightarrow F$ est surjective, un élément de F admet deux antécédents, et les $n - 1$ autres en admettent exactement un.

Pour construire une telle application surjective, on commence par choisir l'élément de F qui aura deux antécédents : il y a n façons de choisir cet élément dans F .

Il faut ensuite choisir les deux antécédents de cet élément dans E : il y a $\binom{n+1}{2}$ façons de le faire, soit $\frac{n(n+1)}{2}$ possibilités.

Enfin, il faut mettre en bijection les $n - 1$ éléments restants de E avec les $n - 1$ éléments restants de F : il y a $(n - 1)!$ façons de le faire.

Finalement, il y a $n \times \frac{n(n+1)}{2} \times (n - 1)! = (n + 1)! \times \frac{n}{2}$ surjections de E vers F .

Exercice 2.

1. Le nombre de mains possible est

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52 - 5)!} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{120} = 2598960.$$

2. Si le roi de cœur est imposé, il reste à choisir les quatre autres cartes parmi les 51 restantes, donc le nombre de mains contenant le roi de cœur est

$$\binom{51}{4} = \frac{51!}{4!47!} = 249900.$$

3. Il faut commencer par choisir les deux cœurs qui seront dans la main, soit $\binom{13}{2} = \frac{12 \times 13}{2} = 78$ possibilités.

On choisit ensuite les trois cartes restantes parmi celles qui ne sont pas des cœurs, soit

$$\binom{39}{3} = \frac{39!}{3!36!} = \frac{39 \times 38 \times 37}{6} = 9139 \text{ possibilités.}$$

Finalement, le nombre de mains contenant exactement deux cœurs est

$$78 \times 9139 = 712842.$$

4. Il faut commencer par choisir les deux dames, soit $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ possibilités.

On choisit ensuite les trois cartes restantes parmi celles qui ne sont pas des dames, soit

$$\binom{48}{3} = \frac{48!}{3!45!} = \frac{48 \times 47 \times 46}{6} = 17296 \text{ possibilités.}$$

Finalement, le nombre de mains contenant exactement deux dames est

$$6 \times 17296 = 103776.$$

5. Le nombre de mains contenant au moins un roi est égal au nombre de mains total moins le nombre de mains ne contenant aucun roi.

Dénombrons le nombre de mains ne contenant aucun roi : pour cela, il faut choisir 5 cartes parmi 48. Le nombre de mains sans roi vaut donc $\binom{48}{5} = \frac{48!}{43!5!} = 1712304$.

Le nombre de mains contenant au moins un roi vaut donc $= 2598960 - 1712304 = 886656$.

6. Il faut commencer par choisir les deux valeurs des paires, soit $\binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$ possibilités.

Pour chacune de ces valeurs, on choisit les deux couleurs qui figureront dans la main, soit $\binom{4}{2}^2 = 36$ possibilités.

Enfin, il reste à choisir une cinquième carte parmi les 11 valeurs restantes, soit 44 possibilités.

Finalement, le nombre de mains contenant exactement deux paires est

$$78 \times 36 \times 44 = 123552.$$

7. Il faut choisir la valeur du brelan, ce qui fait 13 possibilités. Il faut ensuite choisir les trois cartes de cette valeur qui vont former le brelan, soit $\binom{4}{3} = 4$ possibilités. Il reste ensuite à choisir deux cartes de valeurs différentes. On choisit donc 2 valeurs parmi les 12 restantes, soit $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$ possibilités, et pour chacune de ces valeurs, on choisit 1 carte parmi les 4 soit $4 \times 4 = 16$ possibilités.

Finalement, le nombre de mains contenant un brelan est $13 \times 4 \times 66 \times 16 = 54912$.

8. Comme dans la question précédente, on choisit les cartes formant le brelan, ce qui fait $13 \times 4 = 52$ possibilités.

On choisit ensuite la valeur de la paire parmi les 12 valeurs restantes, soit 12 possibilités.

Enfin, on choisit 2 cartes parmi les 4 de cette valeur, soit $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ possibilités.

Finalement, le nombre de mains contenant un full est $52 \times 12 \times 6 = 3744$.

9. Il faut choisir la valeur du carré, soit 13 possibilités. Les quatre cartes devant être choisies, il y a $\binom{4}{4} = 1$ possibilité pour le choix des cartes.

Enfin, il reste à choisir une carte parmi les 48 restantes, soit 48 possibilités.

Finalement, le nombre de mains contenant un carré est $13 \times 48 = 624$.

10. Il faut choisir les cinq hauteurs, soit $\binom{13}{5} = \frac{13!}{8!5!} = 1287$ possibilités.

Enfin, pour chaque hauteur, il faut choisir une carte parmi les quatre de cette hauteur, soit $4^5 = 1024$ possibilités.

Finalement, le nombre de mains contenant cinq cartes de hauteurs distinctes est $1287 \times 1024 = 1317888$.

11. Il faut choisir la couleur concernée, ce qui laisse 4 possibilités. Ensuite, il faut choisir la hauteur débutant la quinte flush, ce qui laisse 10 possibilités (de l'as au 10.)

Il y a donc $4 \times 10 = 40$ mains contenant une quinte flush.

Exercice 3.

1. Pour le choix du scientifique, il y a $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilités.

Pour le choix du littéraire, il y a $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$ possibilités.

Finalement, il y a $10 \times 35 = 350$ jurys possibles.

2. Il y a toujours 10 possibilités pour le choix des scientifiques. Pour les littéraires, si l'un des littéraires est imposé, il reste à choisir 2 littéraires parmi les 6 restants soit $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ possibilités.

Il y a donc $10 \times 15 = 150$ jurys possibles si l'un des littéraires est imposé.

3. Il y a toujours 35 possibilités pour le choix des littéraires.

Pour les scientifiques, tous les binômes sont possibles sauf celui composé des deux scientifiques qui ne s'entendent pas, soit 9 binômes possibles.

Il y a donc $35 \times 9 = 315$ jurys possibles dans ce cas.

4. Il y a toujours 10 possibilités pour le choix des scientifiques.

Pour les littéraires, il faut exclure tous les trinômes contenant le binôme qui ne s'entend pas. Pour cela, dénombrons les trinômes contenant le binôme qui ne s'entend pas. Si deux des littéraires sont imposés, il reste à choisir le dernier littéraire parmi les 5 restants, soit 5 possibilités.

Il y a donc 5 jurys de littéraires contenant le binôme qui ne s'entend pas. Puisqu'il y a 35 jurys de littéraires possibles, il y en a donc 30 qui ne contiennent pas le binôme qui ne s'entend pas.

Il y a donc $10 \times 30 = 300$ jurys possibles dans ce cas.

Exercice 4.

1. Il s'agit de permuter 10 billes de couleurs différentes : il y a donc $10! = 3628800$ possibilités.

2. (a) On commence par choisir l'emplacement des 5 billes rouges. Il y a $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ possibilités.

On place ensuite les deux billes blanches dans les 5 emplacements restants, soit $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilités.

Enfin, l'emplacement des billes vertes est imposé. Il y a donc $252 \times 10 = 2520$ façons de ranger ces billes.

- (b) Il s'agit de choisir un ordre sur les trois couleurs, c'est à dire de permuter les trois couleurs. Il y a donc $3! = 6$ possibilités.

- (c) On commence par positionner les billes rouges. Il faut choisir l'emplacement de la première bille rouge, ce qui conditionnera l'emplacement des autres. La première bille rouge peut être positionnée de la position 1 à la position 6, soit 6 possibilités.

On place ensuite les deux billes blanches dans les 5 emplacements restants, soit $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilités.

Enfin, l'emplacement des billes vertes est imposé.

Il y a donc $6 \times 10 = 60$ façons de ranger les billes dans ce cas.

Exercice 5.

1. Pour chacun des 12 œufs, il y a quatre possibilités de paniers, ce qui fait $4^{12} = 16777216$ répartitions possibles de ces œufs dans les paniers (c'est le nombre d'applications d'un ensemble à 12 éléments vers un ensemble à 4 éléments).

2. (a) Pour le premier panier, on choisit les trois œufs qu'il va contenir, soit $\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!}$ possibilités.

Pour le deuxième panier, on choisit les trois œufs qu'il va contenir parmi les 9 restants, soit $\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!}$ possibilités.

Pour le troisième panier, on choisit les trois œufs qu'il va contenir parmi les 6 restants, soit $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!}$ possibilités.

Enfin, les trois œufs que va contenir le quatrième panier sont imposés.

Finalement, le nombre de répartitions possible est

$$\frac{12!}{9!3!} \times \frac{9!}{6!3!} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{12!}{6^4} = 369600.$$

(b) On commence par choisir le panier qui contient un seul œuf (4 possibilités) et l'œuf en question (12 possibilités).

On choisit ensuite le panier qui va contenir deux œufs (3 possibilités parmi les paniers restants) et les deux œufs en question parmi les 11 restants ($\binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$ possibilités.)

On choisit ensuite le panier qui va contenir trois œufs (2 possibilités parmi les paniers restants) et les trois œufs en question parmi les 9 restants ($\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$ possibilités).

Il ne reste ensuite qu'une seule possibilité pour le panier contenant les 6 œufs restants. Dans ce cas, il y a donc $4 \times 12 \times 3 \times 55 \times 2 \times 84 = 1330560$ répartitions possibles.

(c) On choisit les deux paniers qui vont contenir chacun trois œufs ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités).

On choisit les trois œufs qui vont aller dans le premier de ces deux paniers ($\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$ possibilités,) puis les trois œufs parmi les 9 restants qui vont aller dans le deuxième panier : ($\binom{9}{3} = 84$ possibilités).

On choisit le panier qui va contenir quatre œufs (2 possibilités) et les quatre œufs en question parmi les 6 restants ($\binom{6}{4} = 15$ possibilités).

Enfin, le dernier panier et les deux œufs restants sont imposés.

Dans ce cas, il y a donc $6 \times 220 \times 84 \times 2 \times 15 = 3326400$ possibilités.

(d) On choisit les deux paniers qui vont contenir chacun cinq œufs ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités).

On choisit les cinq œufs qui vont aller dans le premier de ces deux paniers ($\binom{12}{5} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{120} = 792$ possibilités,) puis les cinq œufs parmi les 7 restants qui vont aller dans le deuxième panier : ($\binom{7}{5} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ possibilités).

Il reste ensuite deux œufs à répartir dans deux paniers, soit $2^2 = 4$ possibilités.

Dans ce cas, il y a donc $6 \times 792 \times 21 \times 4 = 399168$ possibilités.

3. Il s'agit seulement de déterminer le nombre d'œufs par panier.

Les répartitions possibles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 12 &= 12 + 0 + 0 + 0 && (4 \text{ choix de paniers possibles}); \\ 12 &= 11 + 1 + 0 + 0 && (12 \text{ choix de paniers possibles}); \\ 12 &= 10 + 2 + 0 + 0 && (12 \text{ choix de paniers possibles}); \\ 12 &= 10 + 1 + 1 + 0; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 9 + 3 + 0 + 0; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 9 + 2 + 1 + 0; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 9 + 1 + 1 + 1; && (4 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 8 + 4 + 0 + 0; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 8 + 3 + 1 + 0; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 8 + 2 + 2 + 0; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 8 + 2 + 1 + 1; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 7 + 5 + 0 + 0; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 7 + 4 + 1 + 0; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 7 + 3 + 2 + 0; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 7 + 3 + 1 + 1; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 7 + 2 + 2 + 1; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 6 + 6 + 0 + 0; && (6 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 6 + 5 + 1 + 0; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 6 + 4 + 2 + 0; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 6 + 4 + 1 + 1; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 6 + 3 + 3 + 0; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 6 + 3 + 2 + 1; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 6 + 2 + 2 + 2; && (4 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 5 + 5 + 2 + 0; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 5 + 5 + 1 + 1; && (6 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 5 + 4 + 3 + 0; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 5 + 4 + 2 + 1; && (24 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 5 + 3 + 3 + 1; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 5 + 3 + 2 + 2; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 4 + 4 + 4 + 0; && (4 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 4 + 4 + 3 + 1; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 4 + 4 + 2 + 2; && (6 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 4 + 3 + 3 + 2; && (12 \text{ choix de paniers possibles}) \\ 12 &= 3 + 3 + 3 + 3 && (1 \text{ choix de paniers possible}). \end{aligned}$$

En sommant toutes les possibilités, on trouve 455 répartitions possibles.

Remarque : il s'agit de calculer les 12-combinaisons avec répétition d'un ensemble à 4 éléments (il suffit d'écrire la 12-combinaison avec répétition constituée des 12 paniers

choisis pour chacun des œufs). On retrouve bien 455 possibilités pour une 12-combinaison avec répétition d'un ensemble à 4 éléments soit

$$\Gamma_4^{12} = \binom{12+4-1}{12} = \binom{15}{12} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{6} = 455.$$

Autre méthode : placer 12 symboles o et 3 symboles $|$ de la forme $ooo|ooo|oooo|oo$. Il y a 15 symboles en tout et on peut commencer par placer les 3 bâtons, soit $\binom{15}{3} = \binom{15}{12}$ possibilités.

Exercice 6. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} > \binom{n}{k} &\Leftrightarrow \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1} > 1 \\ &\Leftrightarrow n-k > k+1 \\ &\Leftrightarrow k < \frac{n-1}{2} \\ &\Leftrightarrow k+1 < \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

- Si n est impair, ceci équivaut à $k+1 \leq \frac{n-1}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
- Si n est pair, ceci équivaut à $k+1 \leq \frac{n}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

On a donc bien $\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k} \Leftrightarrow k+1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

De même,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} \leq \binom{n}{k} &\Leftrightarrow \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow n-k \leq k+1 \\ &\Leftrightarrow k \geq \frac{n-1}{2} \\ &\Leftrightarrow k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

où la dernière équivalence se montre comme précédemment en distinguant les cas n pair et n impair.

Exercice 7.

1. $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n 2^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (2+1)^n = 3^n.$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-2)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (1-2)^n = (-1)^n.$
3. $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} 2^k \binom{n}{k} = (2-1)^n = 1^n = 1.$
- 4.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \quad (\text{changement d'indice } i = k-1) \\
&= n 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \quad (\text{changement d'indice } i = k+1) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0} \right) \\
&= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^n (k-1+1) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^n (k-1) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} + n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} + n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} + n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \quad (i = k-1) \\
&= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} + n2^{n-1} \\
&= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\
&= n2^{n-2}(n-1+2) \\
&= n(n+1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $n \geq 1$.

1. On a

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n = 0$$

car $n \geq 1$.

2. Posons

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$$

et

$$T = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$

D'après la question précédente, on a $S - T = 0$ donc $S = T$.

Par ailleurs, $S + T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ donc $2S = 2^n$ d'où $S = T = 2^{n-1}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé.

• Si $p < n$, la somme est nulle car c'est une somme vide. Par ailleurs, dans ce cas, on a $p+1 < n+1$ d'où $\binom{p+1}{n+1} = 0$. On a donc bien l'égalité si $p < n$.

- Montrons maintenant par récurrence sur l'entier naturel p que pour tout entier $p \geq n$,

$$\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Initialisation : si $p = n$, on a

$$\binom{p+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n}{n} = \sum_{k=n}^n \binom{k}{n}$$

donc la propriété est vérifiée au rang $p = n$.

Hérédité : Soit $p \geq n$ un entier naturel fixé tel que $\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$.

Montrons que $\sum_{k=n}^{p+1} \binom{k}{n} = \binom{p+2}{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{p+1} \binom{k}{n} &= \sum_{k=n}^p \binom{k}{n} + \binom{p+1}{n} \\ &= \binom{p+1}{n+1} + \binom{p+1}{n} \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \\ &= \binom{p+2}{n+1}, \quad (\text{Relation de Pascal}) \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $p+1$ et achève la récurrence.

Finalement, on a bien montré que pour tout couple d'entiers naturels $(p, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Méthode plus élégante, en faisant apparaître un télescopage :

d'après la formule de Pascal, $\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$ donc

$$\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^p \left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \right) = \binom{p+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{p+1}{n+1}$$

car $\binom{n}{n+1} = 0$ puisque $n+1 > n$.

Exercice 10. Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $0 \leq k \leq p \leq n$ et $0 \leq p-k \leq n-k$ donc

$$\frac{\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{p}{k}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^p \frac{\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = 2^p$$

d'où

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Exercice 11. On a

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{j}{k}.$$

Or, si $k > j$, on a $\binom{j}{k} = 0$ donc

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{j}{k} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} = \sum_{j=0}^n 2^j = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 12. Soit x un nombre réel. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(1+x)^{r+s} = \sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n 1^{r+s-n} = \sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n$$

donc le coefficient devant x^n dans $(1+x)^{r+s}$ est bien $\binom{r+s}{n}$. Calculons ce coefficient d'une autre manière.

On a

$$(1+x)^{r+s} = (1+x)^r (1+x)^s = \sum_{p=0}^r \binom{r}{p} x^p \sum_{q=0}^s \binom{s}{q} x^q = \sum_{p=0}^r \sum_{q=0}^s \binom{r}{p} \binom{s}{q} x^{p+q},$$

d'où en réécrivant cette double somme selon la valeur de $p+q$, on obtient

$$(1+x)^{r+s} = \sum_{n=0}^{r+s} \sum_{p+q=n} \binom{r}{p} \binom{s}{q} x^n,$$

donc le coefficient devant x^n dans $(1+x)^{r+s}$ vaut $\sum_{p+q=n} \binom{r}{p} \binom{s}{q}$.

Par unicité de ce coefficient, on obtient bien

$$\sum_{p+q=n} \binom{r}{p} \binom{s}{q} = \binom{r+s}{n}.$$

Dans le cas particulier où $r = s = n$, on a bien $n \leq r+s = 2n$ et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} \binom{n}{q} &= \binom{2n}{n} \Leftrightarrow \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \binom{n}{n-p} = \binom{2n}{n} \\ &\Leftrightarrow \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

• On peut également donner une preuve combinatoire de la relation $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$ un ensemble à $2n$ éléments. Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\overline{A} = \{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$.

On a

$$\begin{aligned}
 \binom{2n}{n} &= \text{Card}\{F \in \mathcal{P}(E), \text{Card}(F) = n\} \\
 &= \text{Card}\left(\bigsqcup_{k=0}^n \{F \in \mathcal{P}(E), \text{Card}(F \cap A) = k, \text{Card}(F \cap \overline{A}) = n - k\}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \text{Card}\{F \in \mathcal{P}(E), \text{Card}(F \cap A) = k, \text{Card}(F \cap \overline{A}) = n - k\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.
 \end{aligned}$$

Exercice 13. Notons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0, 1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A. \end{array}$

Tout d'abord, on remarque que $\text{Card}(\{0, 1\}^E) = \text{Card}(\{0, 1\})^{\text{Card}(E)} = 2^n = \text{Card}(\mathcal{P}(E))$. Ainsi, pour prouver que φ est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective (ou surjective).

Montrons l'injectivité de φ .

Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$ et montrons que $A = B$.

Par hypothèse, on a $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Soit $x \in A$. On a $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1$ car $x \in A$, ce qui prouve que $x \in B$. On a donc montré l'inclusion $A \subset B$.

On montre de même l'inclusion $B \subset A$, d'où finalement $A = B$, ce qui assure l'injectivité de φ . On en conclut que φ est bijective.

Remarque : on aurait pu montrer à la main la surjectivité de φ .

Pour cela, on considère $f \in \{0, 1\}^E$, c'est à dire une application $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ et on montre qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\varphi(A) = f$, i.e. $\mathbb{1}_A = f$.

Soit $f \in \{0, 1\}^E$ et posons $A = \{x \in E, f(x) = 1\}$.

On a alors pour tout $x \in E, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}_A(x)$ donc $f = \mathbb{1}_A$, i.e. $\varphi(A) = f$, ce qui assure la surjectivité de φ .

Exercice 14. Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble à n éléments.

1. L'ensemble des couples (A, B) de parties de E est le produit cartésien $\mathcal{P}(E)^2$.

Or, $\text{card}(\mathcal{P}(E)^2) = \text{card}(\mathcal{P}(E))^2 = (2^n)^2 = 2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$.

Il y a donc 4^n couples (A, B) de parties de E .

2. Listons les éléments de E en notant $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Construisons un couple (A, B) de parties de E disjointes. Pour tout élément de E , il y a trois possibilités qui s'excluent : être dans A , être dans B , ou être ni dans l'un ni dans l'autre (sachant qu'on ne peut être simultanément dans A et dans B).

Ainsi, pour x_1 , il y a trois possibilités, idem pour $x_2, \dots$, idem pour x_n . Il y a donc 3^n possibilités pour construire un tel couple.

Ainsi, il y a 3^n couples (A, B) de parties de E disjointes.

3. Construisons un couple (A, B) de parties de E dont l'intersection est un singleton.
 - Il faut d'abord choisir l'unique élément de E qui sera dans $A \cap B$: il y a n possibilités.
 - Ensuite, on raisonne comme dans la question précédente pour les $n - 1$ éléments restants qui ont chacun 3 possibilités : être dans A , être dans B ou être ni dans l'un ni dans l'autre. Cela donne donc 3^{n-1} possibilités.

On en déduit qu'il y a $n \times 3^{n-1}$ couples (A, B) de parties de E dont l'intersection est un singleton.

Si certaines questions ne sont pas comprises, essayez d'illustrer les situations en prenant l'ensemble $E = \{1, 2\}$.

Exercice 15. Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble de cardinal n . Soit k un entier naturel.

1. Il y a $\binom{n}{k}$ parties de E formées de k éléments (et ce, même si $k > n$, auquel cas $\binom{n}{k}=0$).
2. Il y a n^k k -uplets de E .
3. Si $k > n$, il ne peut pas y avoir de k -uplets d'éléments de E deux à deux distincts.

Si $k \leq n$, il y en a $\frac{n!}{(n-k)!}$.

4. Si $k > n$, il n'y a pas de tel k -uplet.

Supposons $k \leq n$. Construisons un k -uplet d'éléments de E deux à deux distincts, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément le plus grand.

- Choisissons tout d'abord les k éléments de E qui vont constituer le k -uplet : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.

- Plaçons le plus petit élément en première position du k -uplet et le plus grand en dernière position. Il y a une seule manière de faire cela.

Si $k \in \{1, 2\}$, c'est terminé puisque le k -uplet est déjà construit : il y a donc dans ce cas $\binom{n}{k}k$ -uplets tels que le premier élément est le plus petit et le dernier le plus grand.

- Si $k > 2$, il reste à placer les $k - 2$ éléments restants : il y a $(k - 2)!$ façons de le faire.

Si $k \geq 2$, il y a donc $\binom{n}{k}(k - 2)!$ k -uplets tels que le premier élément est le plus petit et le dernier le plus grand.

5. Il y en a autant que de parties de E à k éléments puisqu'une fois les k éléments choisis, il y a une seule manière de les ordonner.

Il y a donc $\binom{n}{k}$ tels k -uplets.