

Liste d'exercices n°7

Nombres complexes

Exercice 1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants.

1. $(2 - 5i)(3 + i)$

2. $\frac{3 + 2i}{i - 1}$

3. $(1 - i)^{32}$

4. $(2 - i)^3$

5. $\frac{1}{1 + i}$

6. $(12 + 5i)(3 - i)$

7. $\frac{i - 3}{i + 2}$

8. $\frac{3 + 2i}{(1 + i)(i - 1)}$

9. $\frac{7 + 3i}{1 - i} + 2i$

Exercice 2. Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z' .

Montrer que le milieu du segment $[MM']$ a pour affixe $\frac{z + z'}{2}$.

Exercice 3. Montrer que si $|z| = |z'| = 1$ et si $1 + zz' \neq 0$, alors le nombre $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

1. $\frac{z + 1}{z - 1}$ soit réel ;

2. $\frac{z + 1}{z - 1}$ soit imaginaire pur.

Exercice 5. Donner une écriture trigonométrique/exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $-3i$

2. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $1 - i\sqrt{3}$

4. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + i\sqrt{3})$

5. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

6. $3 + i\sqrt{3}$

7. $1 + i$

8. $(1 - i)(-1 + i\sqrt{3})$

9. $(1 - i)^7$

10. $\frac{\sqrt{2} - 1 - i}{2i}$

11. $-3 \exp(4)$

Exercice 6. Soit α un réel. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^4$

2. $-\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$

3. $\cos(-\alpha) + i \sin(\alpha)$

4. $-2i \cos(\alpha) + 2 \sin(\alpha)$

5. $\sin(\alpha) + i \cos(\alpha)$

6. $1 + i \tan(\alpha)$

7. $1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.

Exercice 7. Déterminer le module et un argument de $-\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Exercice 8. Soient $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Re}(z_i \overline{z_j}).$$

Exercice 9.

1. Trouver les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.
2. Trouver les nombres complexes z tels que $z^2 = -i$.
3. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme $x^4 + 1$ en quatre facteurs de degré 1.
4. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme $x^4 + 1$ en deux facteurs de degré 2.

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z complexe.

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $2z + \bar{z} = 2 + 3i$
3. $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$
4. $3\bar{z} + 3z - 2 + 3i = 0$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z complexe.

1. $5 + 2z^2 + 6z = 0$
2. $-z^2 - z + 6 = 0$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $\frac{3z - 2}{z + 1} = -3z + 2$

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z complexe.

1. $z^2 = 3 + 4i$
2. $z^2 = 8 - 6i$

Exercice 13. Soit $u \in]0; \pi[$. On considère l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$z^2 + 2[1 - \cos(u)]z + 2[1 - \cos(u)] = 0.$$

Trouver les solutions de cette équation et les mettre sous forme trigonométrique.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 - i = 6(z + i)$.
2. $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

Exercice 15. Soit x un réel. Linéariser les expressions suivantes.

1. $\cos^4(x)$
2. $\cos^4(x) \sin^2(x)$
3. $\sin^5(x)$

Exercice 16. Soit x un réel. Délinéariser les expressions suivantes.

1. $\cos(4x)$
2. $\sin(6x)$
3. $\cos(3x)$
4. $\sin(3x)$
5. $\cos(7x)$
6. $\sin(7x)$

Exercice 17. Pour x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, on pose $C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

Calculer $C_n(x)$ et $S_n(x)$.

(Indication : penser à la formule de Moivre.)

Exercice 18. Soient n un entier naturel non nul et x un réel.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$.
2. Calculer $\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-3)^k \binom{n}{2k}$ à l'aide de $(1 + i\sqrt{3})^n$.

Exercice 19.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, notons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Calculer $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$.