Corrigé du devoir maison n°3

# Exercice : Points fixes d'une permutation

1. Il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$, donc il y a $\boxed{n! \text{ tirages possibles.}}$

2. Dans cette question, on pose $n = 4$. On étudie donc les permutations de l'ensemble $[\![1, 4]\!]$.

   • Soit $p = 0$. On cherche à calculer $F(4, 0)$, c'est à dire le nombre de permutations de $[\![1, 4]\!]$ sans points fixes. En faisant la liste des permutations possibles, on constate que celles qui n'ont pas de points fixes sont les suivantes:

   $$(2,1,4,3),(2,3,4,1),(2,4,1,3),(3,1,4,2),(3,4,1,2),(3,4,2,1),(4,1,2,3),(4,3,1,2),(4,3,2,1).$$

   Il y en a 9 donc $\boxed{F(4,0) = 9.}$

   • Soit $p = 1$. Les permutations qui possèdent un seul point fixe sont les suivantes:

   $$(1,3,4,2),(1,4,2,3),(2,3,1,4),(2,4,3,1),(3,1,2,4),(3,2,4,1),(4,1,3,2),(4,2,1,3).$$

   Il y en a 8 donc $\boxed{F(4,1) = 8.}$

   • Soit $p = 2$. Les permutations qui possèdent exactement deux points fixes sont les suivantes:

   $$(1,2,4,3),(1,4,3,2),(1,3,2,4),(2,1,3,4),(3,2,1,4),(4,2,3,1).$$

   Il y en a 6 donc $\boxed{F(4,2) = 6.}$

   • Soit $p = 3$. Si une permutation possède 3 points fixes, nécessairement le 4ème point sera également fixé. Il ne peut donc pas exister de permutation de $[\![1, 4]\!]$ qui possède exactement 3 points fixes.

   Ainsi, $\boxed{F(4,3) = 0.}$

   • Enfin, pour $p = 4$, la seule permutation qui possède 4 points fixes est la permutation $(1, 2, 3, 4)$ donc $\boxed{F(4,4) = 1.}$

   On remarque qu'on a bien épuisé toutes les permutations possibles puisque

   $$F(4,0) + F(4,1) + F(4,2) + F(4,3) + F(4,4) = 24 = 4!.$$

3. La seule permutation qui possède $n$ points fixes est la permutation $(1, 2, 3, \ldots, n)$ donc $\boxed{F(n,n) = 1.}$

   Comme expliqué à la question précédente, dès lors qu'une permutation admet $n-1$ points fixes, le dernier point est lui-même nécessairement fixé également donc il n'existe pas de permutation qui admette exactement $n - 1$ points fixes.

   Ainsi, $\boxed{F(n,n-1) = 0.}$

4. Notons $A$ l'ensemble des tirages possibles. D'après la première question, $\text{card}(A) = n!$.

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $A_{n,k}$ l'ensemble des tirages admettant exactement $k$ points fixes. Par définition, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\text{card}(A_{n,k}) = F(n, k)$.

   Puisque tout tirage admet un et un seul nombre de points fixes, on a l'union disjointe

$$A = \bigsqcup_{k=0}^{n} A_{n,k}$$

   donc $\text{card}(A) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(A_{n,k})$ d'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F(n,k) = n!.}$$

5. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

   Dénombrons le nombre de tirage de $n$ boules qui possèdent $k$ points fixes.

   • Tout d'abord, on choisit les $k$ points fixes: il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.

   • Ensuite, il faut permuter les $n - k$ entiers restants sans point fixe, pour ne conserver que $k$ points fixes au total. Cela revient donc à dénombrer le nombre de permutations de $n - k$ éléments sans points fixes: il y a donc $\omega_{n-k}$ possibilités.

   Au final, il y a donc $\binom{n}{k}\omega_{n-k}$ tirages qui possèdent exactement $k$ points fixes donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], F(n,k) = \binom{n}{k}\omega_{n-k}.}$$

6. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\omega_k \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\omega_k \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\omega_k \quad \text{car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\omega_{n-i} \quad (i = n-k) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} F(n,i) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{n!}{n!} \quad \text{d'après la question 4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} = 1.}$$

7. (a) D'après la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_k}{k!(n+1-k)!} = 1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n+1-k)!} + \frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!}.}$$

(b) Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\omega_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

• Initialisation: pour $n = 0, \omega_0 = F(0,0) = 1$ par définition donc $\dfrac{\omega_0}{0!} = 1$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} = 1$.

On a donc bien $\dfrac{\omega_0}{0!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!}$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{\omega_k}{k!} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

Montrons que $\dfrac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$.

En utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence forte, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!}.
\end{aligned}$$

Dans la première somme, si $k = 0$, alors la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{-1} \frac{(-1)^i}{i!}$ est nulle donc on peut faire partir la première somme de $k = 1$ puis on fait le changement d'indice $j = k - 1$. Dans la deuxième somme, on va ajouter et soustraire le terme d'indice $n + 1$ pour faire apparaître un binôme de Newton. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!} \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} (-1)^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{\omega_j}{j!}$ donc en remplaçant dans la première somme, on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!}\frac{\omega_j}{j!} - \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}1^{n+1-k}(-1)^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{\omega_n}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}(1-1)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \text{(en appliquant la question précédente à } n-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \text{(en utilisant l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Ainsi, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.}$$

Remarque: on a utilisé la formule de la question précédente au rang $n-1$, ce qui peut poser problème si $n = 0$. Mais dans ce cas, on a $\omega_1 = 0$ (en effet, il n'existe pas de tirage d'une seule boule sans point fixe) et on a bien

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 = 0.$$

# Problème : Nombre de surjections entre ensembles finis

## Partie I: Premiers exemples

1. • Si $p > n$, il n'y a pas de surjection de $I_n$ vers $I_p$ donc $\boxed{S_{n,p} = 0 \text{ si } p > n.}$

   • Si $p = n$, puisque $\text{card}(I_n) = \text{card}(I_p)$, toute application de $I_n$ vers $I_p$ est surjective si et seulement si elle est bijective. Ainsi, il y a autant d'applications surjectives de $I_n$ vers $I_n$ que d'applications bijectives de $I_n$ vers $I_n$. On en déduit que $\boxed{S_{n,p} = n! \text{ si } p = n.}$

2. • Pour $p = 1$, il y a une seule application de $I_n$ vers $I_1 = \{1\}$ : c'est l'application constante égale à 1 et elle est surjective donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{n,1} = 1.}$

   • Pour $p = 2$, il y a $2^n$ applications de $I_n$ vers $I_2 = [\![1, 2]\!]$. Elles sont toutes surjectives, hormis les deux applications constantes (celle égale à 1 et celle égale à 2).

   Il y a donc $2^n - 2$ applications surjectives de $I_n$ vers $I_2$ donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{n,2} = 2^n - 2.}$

3. Dénombrons les applications $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ surjectives.

   Si $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ est surjective, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe $x_k \in I_{p+1}$ tel que $f(x_k) = k$. Les images des $p$ éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont donc imposées. Il reste un élément $x_{p+1} \in I_{p+1}$ dont il faut choisir l'image dans $I_p$. Cette image $f(x_{p+1})$ aura nécessairement deux antécédents.

Ainsi, si $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ est surjective, un élément de $I_p$ admet deux antécédents, et les $p-1$ autres en admettent exactement un.

Pour construire une telle application surjective, on commence par choisir l'élément de $I_p$ qui aura deux antécédents: il y a $p$ façons de choisir cet élément dans $I_p$.

Il faut ensuite choisir les deux antécédents de cet élément dans $I_{p+1}$ : il y a $\binom{p+1}{2}$ façons de le faire, soit $\dfrac{p(p+1)}{2}$ possibilités.

Enfin, il faut mettre en bijection les $p-1$ éléments restants de $I_{p+1}$ avec les $p-1$ éléments restants de $I_p$ : il y a $(p-1)!$ façons de le faire.

Finalement, il y a $p \times \dfrac{p(p+1)}{2} \times (p-1)! = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}$ surjections de $I_{p+1}$ vers $I_p$ donc

$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}.}$

## Partie II: Cas général

1. Si $n \geqslant p$, il existe au moins une surjection de $I_n$ vers $I_p$, par exemple l'application

$$\begin{array}{ccc} f : I_n & \longrightarrow & I_p \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \leqslant p \\ p & \text{si } k \geqslant p \end{cases} \end{array}$$

   On en déduit que $\boxed{S_{n,p} > 0.}$

2. On a d'après la formule du binôme de Newton:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k 1^{p-k} = (1-1)^p = 0^p.$$

   Or, $p$ est un entier naturel non nul donc $0^p = 0$, ce qui prouve que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0.}$

3. (a) Puisque $k \leqslant l \leqslant p$, on a $k \leqslant p$ et $l - k \leqslant p - k$ donc

$$\binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{(p-k)!}{(l-k)!(p-k-(l-k))!} = \frac{p!}{l!(p-l)!}\frac{l!}{k!(l-k)!}$$

   d'où $\boxed{\binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}.}$

   (b) • Supposons que $k < p$. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}.$$

   En posant le changement d'indice $i = l - k$, on trouve

$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k} \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^{i+k} \binom{p-k}{i} = (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^i \binom{p-k}{i}.$$

Puisque $k < p$, on a $p - k > 0$ donc en appliquant le résultat de la question 2 de la partie II, on obtient $\sum_{i=0}^{p-k} (-1)^i \binom{p-k}{i} = 0$.

On en déduit donc que $\boxed{\text{si } k < p, \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = 0.}$

• Si $k = p$, on trouve

$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = \sum_{l=p}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{p} = (-1)^p \binom{p}{p}\binom{p}{p}$$

d'où

$$\boxed{\text{si } k = p, \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = (-1)^p.}$$

4. Soit $k \in I_p$. Pour construire une application $f$ de $I_n$ vers $I_p$ dont l'image contient $k$ éléments, il faut commencer par choisir les $k$ éléments de $I_p$ qui vont former l'image de $f$, ce qui peut se faire de $\binom{p}{k}$ façons.

   Il faut ensuite construire une surjection de $I_n$ vers $\mathrm{Im}(f)$, c'est à dire une surjection de $I_n$ vers un ensemble à $k$ éléments (qui est donc en bijection avec $I_k$): cela peut se faire de $S_{n,k}$ façons.

   $\boxed{\text{Finalement, il y a } \binom{p}{k} S_{n,k} \text{ applications de } I_n \text{ vers } I_p \text{ dont l'image contient } k \text{ élements.}}$

5. Pour tout $k \in I_p$, notons $A_k$ l'ensemble des applications de $I_n$ vers $I_p$ dont l'image contient $k$ éléments.

   On rappelle qu'on note $I_p^{I_n}$ l'ensemble des applications de $I_n$ vers $I_p$. On a alors

   $$I_p^{I_n} = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k$$

   où l'union est disjointe puisque pour toute application $f \in I_p^{I_n}$, il existe un unique entier $k \in I_p$ tel que $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f)) = k$.

   On obtient alors $\mathrm{Card}(I_p^{I_n}) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k)$.

   Or, on sait que $\mathrm{Card}(I_p^{I_n}) = \mathrm{Card}(I_p)^{\mathrm{Card}(I_n)} = p^n$ et d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Card}(A_k) = \binom{p}{k} S_{n,k}$.

   On trouve donc bien $\boxed{p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}.}$

6. D'après la question précédente, on a pour tout $l \in [\![1, p]\!]$, $l^n = \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} S_{n,k}$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}(-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}l^n &= (-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\sum_{k=1}^{l}\binom{l}{k}S_{n,k}\\ &= (-1)^p\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{l}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}S_{n,k}\\ &= (-1)^p\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}S_{n,k}\\ &= (-1)^p\sum_{k=1}^{p}S_{n,k}\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}.\end{aligned}$$

Or, d'après la question 3.*b*) de la partie II, on sait que $\displaystyle\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}=0$ si $k<p$ et vaut $(-1)^p$ si $k=p$. Il ne reste donc dans la double somme que le terme pour $k=p$.

Il en découle que

$$(-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}l^n=(-1)^pS_{n,p}\sum_{l=p}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{p}=(-1)^p(-1)^pS_{n,p}=(-1)^{2p}S_{n,p}=S_{n,p}$$

donc

$$\boxed{S_{n,p}=(-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}l^n.}$$

## Partie III: Calcul par récurrence des $S_{n,p}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit $0<p\leqslant n-1$.

   Soit $\varphi$ une surjection de $I_n$ vers $I_p$. Il y a $S_{n,p}$ façons de choisir $\varphi$.

   Soit $\varphi_1$ la restriction de $\varphi$ à $I_{n-1}$.

   Il y a deux cas qui s'excluent:

   • Supposons que $\varphi_1 : I_{n-1}\longrightarrow I_p$ est surjective (ce qui est possible car $n-1\geqslant p$). Il y a $S_{n-1,p}$ surjections de $I_{n-1,p}$. Il reste à fixer ensuite $\varphi(n)\in I_p$, ce qui laisse $p$ choix.

   Ainsi, il y a $pS_{n-1,p}$ surjections de $I_n$ vers $I_p$ dont la restriction à $I_{n-1}$ est surjective.

   • Supposons que $\varphi_1 : I_{n-1}\longrightarrow I_p$ n'est pas surjective.

   Par surjectivité de $\varphi$, pour tout $k\in I_p$, il existe $x_k\in I_n$ tel que $\varphi(x_k)=k$.

   Puisque $\varphi_1$ n'est pas surjective, ceci signifie que $\varphi(n)$ a un seul antécédent dans $I_n$, qui est forcément $n$ (s'il en avait plus, il existerait $x_n\in I_{n-1}$ tel que $\varphi_1(x_n)=\varphi(n)$ et pour tout $k\in I_{p-1}\setminus\{\varphi(n)\}$, il existe $x_k\in I_{n-1}$ tel que $\varphi_1(x_k)=k$ donc $\varphi_1$ serait surjective). Il y a $p$ possibilités pour choisir $\varphi(n)$ dans $I_p$.

   A ce stade, $\mathrm{Im}(\varphi_1)\subset I_p\setminus\{\varphi(n)\}$.

   Toujours par surjectivité de $\varphi$, puisque pour tout $k\in I_p\setminus\{\varphi(n)\}$, il existe $x_k\in I_{n-1}$ tel que $\varphi(x_k)=k$, on a $\mathrm{Im}(\varphi_1)=I_p\setminus\{\varphi(n)\}$, i.e. $\varphi_1 : I_{n-1}\longrightarrow I_p\setminus\{\varphi(n)\}$ est surjective.

Or, $I_p \setminus \{\varphi(n)\}$ est de cardinal $p-1$ donc est en bijection avec $I_{p-1}$ et il y a $S_{n-1,p-1}$ surjections de $I_{n-1}$ vers $I_{p-1}$.

Ainsi, il y a $pS_{n-1,p-1}$ surjections de $I_n$ vers $I_p$ dont la restriction à $I_{n-1}$ n'est pas surjective.

En sommant les deux possibilités, on trouve bien que

$$\boxed{\text{si } 0 < p \leqslant n-1, S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}).}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

• D'après la formule trouvée en question précédente, on a (puisque $0 < p \leqslant (p+1)-1$):

$$S_{p+1,p} = p(S_{p,p} + S_{p,p-1}).$$

D'après la question 1 de la partie I, on sait que $S_{p,p} = p!$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{p+1,p} = p(p! + S_{p,p-1}).$$

Montrons alors par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}$.

**Initialisation :** Pour $p = 1$, on a $S_{p+1,p} = S_{2,1} = 1$ d'après la question 2 de la partie I.

D'autre part, $(p+1)! \times \dfrac{p}{2} = 2! \times \dfrac{1}{2} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang $p = 1$.

**Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p+1,p} = (p+1)!\dfrac{p}{2}$.

Montrons la propriété au rang $p+1$, i.e. $S_{p+2,p+1} = (p+2)! \times \dfrac{p+1}{2}$.

On sait que

$$S_{p+2,p+1} = (p+1)((p+1)! + S_{p+1,p}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$S_{p+2,p+1} = (p+1)\left((p+1)! + (p+1)!\frac{p}{2}\right) = (p+1)(p+1)!\frac{p+2}{2} = (p+2)! \times \frac{p+1}{2},$$

ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien retrouvé que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}.}$

• Toujours d'après la formule de la question précédente, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{p+2,p} = p(S_{p+1,p} + S_{p+1,p-1}) = p\left((p+1)! \times \frac{p}{2} + S_{p+1,p-1}\right).$$

Montrons alors par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$.

**Initialisation :** Pour $p = 1$, on a encore $S_{p+2,p} = S_{3,1} = 1$.

D'autre part, $\dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24} = \dfrac{1 \times 4 \times 3!}{24} = \dfrac{4 \times 6}{24} = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang $p = 1$.

**Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$.

Montrons la propriété au rang $p+1$, i.e.

$$S_{p+3,p+1} = \frac{(p+1)(3(p+1)+1)(p+3)!}{24} = \frac{(p+1)(3p+4)(p+3)!}{24}.$$

On sait que $S_{p+3,p+1} = (p+1)\left((p+2)! \times \dfrac{p+1}{2} + S_{p+2,p}\right)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\begin{aligned} S_{p+3,p+1} &= (p+1)\left((p+2)! \times \frac{p+1}{2} + \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}\right) \\ &= (p+1)(p+2)!\frac{12p+12+3p^2+p}{24} \\ &= (p+1)(p+2)!\frac{3p^2+13p+12}{24} \\ &= (p+1)(p+2)!\frac{(3p+4)(p+3)}{24} \\ &= \frac{(p+1)(3p+4)(p+3)!}{24}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}.}$

3. Grâce aux formules montrées précédemment, on peut construire la table des $S_{n,p}$ de proche en proche:

| | $p=1$ | $p=2$ | $p=3$ | $p=4$ | $p=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | 1 | | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | | | |
| $n=3$ | 1 | 6 | 6 | | |
| $n=4$ | 1 | 14 | 36 | 24 | |
| $n=5$ | 1 | 30 | 150 | 240 | 120 |

En effet, les formules $S_{n,1} = 1$ et $S_{n,n} = n!$ permettent de remplir les termes extrêmes. Les formules $S_{p+1,p}$ et $S_{p+2,p}$ permettent ensuite de remplir toutes les cases de ce tableau, hormis celle pour $n=5$ et $p=2$.

On la calcule grâce à la formule $S_{5,2} = 2(S_{4,2} + S_{4,1}) = 2(14+1) = 30$.