Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°2

Exercice 1 : Des boules dans une urne

1. Il s'agit de tirer 5 boules parmi 12. $\boxed{\text{Il y a donc } \binom{12}{5} = 792 \text{ tirages possibles en tout.}}$
2. Si les trois boules portant le numéro 1 figurent dans les 5 boules du tirage, il reste à choisir les 2 boules restantes parmi les 9 boules qui ne portent pas le numéro 1.

$$\boxed{\text{Il y a donc } \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36 \text{ tirages contenant les trois boules portant le numéro } 1.}$$

3. Dénombrons le nombre de tirages sans aucune boule rouge. Pour obtenir un tirage sans boule rouge, sachant qu'il y a 5 boules rouges, il faut choisir 5 boules parmi 7. Il y a donc $\binom{7}{5}$ tirages sans aucune boule rouge. Puisqu'il y a $\binom{12}{5}$ tirages au total,

$$\boxed{\text{il y a } \binom{12}{5} - \binom{7}{5} = 792 - 21 = 771 \text{ tirages contenant au moins une boule rouge.}}$$

4. Pour obtenir un tirage contenant exactement trois boules rouges, il faut d'abord choisir les trois boules rouges : il y a $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ façons de le faire.

   Il faut ensuite choisir les 2 boules restantes en dehors des boules rouges : il y a $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ façons de le faire.

$$\boxed{\text{Il y a donc } 21 \times 10 = 210 \text{ tirages contenant exactement trois boules rouges.}}$$

5. • Il n'y a pas assez de boules blanches pour qu'un tirage ne comporte que des boules blanches.
   Il y a donc deux tirages d'une seule couleur :celui comportant les 5 boules rouges et celui comportant les 5 boules bleues.
   • Dénombrons les tirages qui ne contiennent que des boules blanches et rouges. Pour obtenir un tel tirage, il faut choisir 5 boules parmi 7 : il y a donc $\binom{7}{5} - 1 = \frac{7 \times 6}{2} - 1 = 20$ tirages contenant exclusivement des boules blanches et rouges (il faut enlever le tirage contenant 5 boules rouges).
   De même, il y a $\binom{7}{5} - 1 = 20$ tirages contenant exclusivement des boules blanches et bleues.
   Enfin, pour obtenir un tirage ne contenant que des boules rouges et des boules bleues, il faut choisir 5 boules parmi 10 soit $\binom{10}{5} - 2 = 252 - 2 = 250$ possibilités (il faut enlever les deux tirages monocolores).

$$\boxed{\text{Il y a donc } 250+20+20 = 290 \text{ tirages bicolores.}}$$

• Enfin, un tirage est soit monocolore, soit bicolore soit tricolore. Donc le nombre de tirages tricolores est le nombre de tirages total moins le nombre de tirages monocolores ou bicolores.

$$\boxed{\text{Ainsi, il y a } 792-290-2 = 500 \text{ tirages tricolores.}}$$

Exercice 2 : Etude d'une fonction

1. Tout d'abord, pour que $\sqrt{x}$ soit défini, il faut que $x \geqslant 0$. Ensuite, la fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, donc celle-ci n'apporte aucune contrainte.
   Finalement, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+.}$
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $n^2 \in \mathbb{R}_+$, $f(n^2)$ est bien défini et on a $f(n^2) = \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = \lfloor |n| \rfloor$.
   Puisque $|n| \in \mathbb{Z}$, $\lfloor |n| \rfloor = |n|$.
   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, f(n^2) = |n|.}$
3. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $x \leqslant y$.
   Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ puis, par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, on a $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{y} \rfloor$.
   Ainsi, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$
4. • On a $f(0) = \lfloor \sqrt{0} \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$.
   • On a $f(3) = \lfloor \sqrt{3} \rfloor$. Or, $1 \leqslant \sqrt{3} < 2$ donc $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ d'où $\boxed{f(3) = 1.}$
   • On a $f(4\pi) = \lfloor \sqrt{4\pi} \rfloor = \lfloor 2\sqrt{\pi} \rfloor$.
   Or, $3 < \pi < 4$ donc $12 < 4\pi < 16$ puis par croissance de la fonction racine carrée, on obtient $\sqrt{12} < \sqrt{4\pi} < 4$, i.e. $2\sqrt{3} < \sqrt{4\pi} < 4$.
   Or, puisque $\frac{9}{4} < 3$, on a $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} < \sqrt{3}$ d'où $3 < 2\sqrt{3}$.
   Finalement $3 < 2\sqrt{3} < \sqrt{4\pi} < 4$, ce qui prouve que $\boxed{f(4\pi) = \lfloor 4\pi \rfloor = 3.}$
   • On sait que $e \simeq 2,71828$ donc $2,7 < e < 2,8$. Ainsi, $5,1 < 3e < 8,4$ puis $2 < \sqrt{5,1} < \sqrt{3e} < \sqrt{8,4} < 3$ ce qui prouve que $\boxed{f(3e) = \lfloor 3e \rfloor = 2.}$
5. (a) La fonction partie entière étant à valeurs dans $\mathbb{Z}$, il en est de même de la fonction f. Puisque $\pi \notin \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = \pi \text{ n'admet pas de solution sur } \mathcal{D}_f.}$
   (b) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$, puisque $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0) = 0$ donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = -1 \text{ n'admet pas de solution sur } \mathcal{D}_f.}$
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a les équivalences suivantes :
   $$f(x) = k \Leftrightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = k \Leftrightarrow k \leqslant \sqrt{x} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leqslant x < (k+1)^2$$
   par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = k \text{ est } [k^2, (k+1)^2[.}$
6. Comme vu précédemment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \in \mathbb{Z}$ et $f(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{N}$.
   Montrons l'inclusion réciproque. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in [n^2, (n+1)^2[\subset \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = n$ donc $n \in \mathrm{Im}(f)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque $\mathbb{N} \subset \mathrm{Im}(f)$, et finalement l'égalité $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N}.}$

$\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est pas injective}}$ car, toujours d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1[, f(x) = 0$ donc, par exemple, $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$.

7. D'après la question 5.d, on a pour tout $x \in [0,1[, f(x) = 0$, pour tout $x \in [1,4[, f(x) = 1$, pour tout $x \in [4,9[, f(x) = 2$ et pour tout $x \in [9,10[\subset [9,16[, f(x) = 3$.
8. Par définition de la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leqslant \sqrt{n} < \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 = f(n) + 1,$$

d'où en encadrant $f(n)$, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} - 1 < f(n) \leqslant \sqrt{n}.}$

9. (a) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} < f(n) + 1 \leqslant \sqrt{n} + 1$ d'où en divisant par $\sqrt{n} > 0$, on obtient $1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 2$, ce qui prouve que l'ensemble A est borné. En conséquence, $\boxed{A \text{ admet une borne supérieure et une borne inférieure.}}$

   (b) On a pour tout $x \in A, x \leqslant 2$ et pour $n = 1$, $\dfrac{f(1)+1}{\sqrt{1}} = 2$. Ainsi, 2 est un élément de A qui est un majorant de A.

   On en déduit que $\boxed{2 = \sup(A) = \max(A).}$

   (c) D'après la question 9.(a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$.

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} = 1 = l.}$

   (d) D'une part, on sait que pour tout $x \in A, f(x) > 1$.

   D'autre part, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} = 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} < 1 + \varepsilon$.

   Autrement dit, on a $\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in A, 1 < x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, 1 < x < 1 + \varepsilon \end{array} \right.$, ce qui prouve que $\boxed{l = 1 = \inf(A)}$.

   Néanmoins, puisque pour tout $x \in A, 1 < x, 1$ n'est pas un élément de A, i.e. la borne inférieure de A n'appartient pas à A.

   On en conclut que $\boxed{A \text{ n'admet pas de minimum.}}$

10. (a) On a $[\![0, n^2]\!] = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} [\![i^2, (i+1)^2 - 1]\!] \cup \{n^2\}$ donc

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} f(k) + f(n^2).$$

   Or, d'après la question 5.(c), pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![i^2, (i+1)^2 - 1]\!], f(k) = i$ donc

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} i + n = \sum_{i=0}^{n-1} ((i+1)^2 - 1 - i^2 + 1)i + n$$

d'où

$$\boxed{S_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1}((i+1)^2 - i^2)i\right) + n.}$$

(b) Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)i + n \\
&= 2\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i + n \\
&= 2 \times \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + n \\
&= \frac{n[2(n-1)(2n-1)+3(n-1)+6]}{6} \\
&= \boxed{\frac{n(4n^2-3n+5)}{6}.}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Points fixes d'une permutation

1. Il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$, donc il y a $\boxed{n!\text{ tirages possibles.}}$
2. Dans cette question, on pose $n = 4$. On étudie donc les permutations de l'ensemble $[\![1, 4]\!]$.
   • Soit $p = 0$. On cherche à calculer $F(4, 0)$, c'est à dire le nombre de permutations de $[\![1, 4]\!]$ sans points fixes. En faisant la liste des permutations possibles, on constate que celles qui n'ont pas de points fixes sont les suivantes :

   $$(2,1,4,3),(2,3,4,1),(2,4,1,3),(3,1,4,2),(3,4,1,2),(3,4,2,1),(4,1,2,3),(4,3,1,2),(4,3,2,1).$$

   Il y en a 9 donc $\boxed{F(4, 0) = 9.}$
   • Soit $p = 1$. Les permutations qui possèdent un seul point fixe sont les suivantes :

   $$(1,3,4,2),(1,4,2,3),(2,3,1,4),(2,4,3,1),(3,1,2,4),(3,2,4,1),(4,1,3,2),(4,2,1,3).$$

   Il y en a 8 donc $\boxed{F(4, 1) = 8.}$
   • Soit $p = 2$. Les permutations qui possèdent exactement deux points fixes sont les suivantes :

   $$(1,2,4,3),(1,4,3,2),(1,3,2,4),(2,1,3,4),(3,2,1,4),(4,2,3,1).$$

   Il y en a 6 donc $\boxed{F(4, 2) = 6.}$
   • Soit $p = 3$. Si une permutation possède 3 points fixes, nécessairement le 4ème point sera également fixé. Il ne peut donc pas exister de permutation de $[\![1, 4]\!]$ qui possède exactement 3 points fixes.
   Ainsi, $\boxed{F(4, 3) = 0.}$
   • Enfin, pour $p = 4$, la seule permutation qui possède 4 points fixes est la permutation $(1, 2, 3, 4)$ donc $\boxed{F(4, 4) = 1.}$
   On remarque qu'on a bien épuisé toutes les permutations possibles puisque

   $$F(4,0) + F(4,1) + F(4,2) + F(4,3) + F(4,4) = 24 = 4!.$$

3. La seule permutation qui possède n points fixes est la permutation $(1, 2, 3, \ldots, n)$ donc $\boxed{F(n, n) = 1.}$
Comme expliqué à la question précédente, dès lors qu'une permutation admet $n-1$ points fixes, le dernier point est lui-même nécessairement fixé également donc il n'existe pas de permutation qui admette exactement $n - 1$ points fixes.
Ainsi, $\boxed{F(n, n-1) = 0.}$
4. Notons A l'ensemble des tirages possibles. D'après la première question, $\text{card}(A) = n!$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $A_{n,k}$ l'ensemble des tirages admettant exactement k points fixes. Par définition, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\text{card}(A_{n,k}) = F(n, k)$.
Puisque tout tirage admet un et un seul nombre de points fixes, on a l'union disjointe
$$A = \bigsqcup_{k=0}^{n} A_{n,k}$$
donc $\text{card}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{card}(A_{n,k})$ d'où
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F(n, k) = n!.}$$
5. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Dénombrons le nombre de tirage de n boules qui possèdent k points fixes.
• Tout d'abord, on choisit les k points fixes : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
• Ensuite, il faut permuter les $n - k$ entiers restants sans point fixe, pour ne conserver que k points fixes au total. Cela revient donc à dénombrer le nombre de permutations de $n - k$ éléments sans points fixes : il y a donc ω_{n-k} possibilités.
Au final, il y a donc $\binom{n}{k}\omega_{n-k}$ tirages qui possèdent exactement k points fixes donc
$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], F(n, k) = \binom{n}{k}\omega_{n-k}.}$$
6. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\omega_k \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\omega_k \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\omega_k \quad \text{car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\omega_{n-i} \quad (i = n-k) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} F(n, i) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{n!}{n!} \quad \text{d'après la question 4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} = 1.}$$

7. (a) D'après la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_k}{k!(n+1-k)!} = 1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n+1-k)!} + \frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!}.}$$

(b) Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

• Initialisation : pour $n = 0, \omega_0 = F(0,0) = 1$ par définition donc $\displaystyle\frac{\omega_0}{0!} = 1$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} = 1$.

On a donc bien $\displaystyle\frac{\omega_0}{0!} = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!}$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\frac{\omega_k}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

Montrons que $\displaystyle\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$.

En utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence forte, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!}.
\end{aligned}$$

Dans la première somme, si $k = 0$, alors la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{-1} \frac{(-1)^i}{i!}$ est nulle donc on peut faire partir la première somme de $k = 1$ puis on fait le changement d'indice $j = k - 1$. Dans la deuxième somme, on va ajouter et soustraire le terme d'indice $n+1$ pour faire apparaître un binôme de Newton. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!} \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} (-1)^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{\omega_j}{j!}$ donc en remplaçant dans la première somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!} \frac{\omega_j}{j!} - \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^{n+1-k} (-1)^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{\omega_n}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}(1-1)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \text{(en appliquant la question précédente à } n-1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \text{(en utilisant l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Ainsi, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.}$$

Remarque : on a utilisé la formule de la question précédente au rang $n-1$, ce qui peut poser problème si $n=0$. Mais dans ce cas, on a $\omega_1 = 0$ (en effet, il n'existe pas de tirage d'une seule boule sans point fixe) et on a bien

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 = 0.$$

Problème 1 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Partie I : Premiers exemples

1. • Si $p > n$, il n'y a pas de surjection de I_n vers I_p donc $\boxed{S_{n,p} = 0 \text{ si } p > n.}$

   • Si $p = n$, puisque $\text{card}(I_n) = \text{card}(I_p)$, toute application de I_n vers I_p est surjective si et seulement si elle est bijective. Ainsi, il y a autant d'applications surjectives de I_n vers I_n que d'applications bijectives de I_n vers I_n. On en déduit que $\boxed{S_{n,p} = n! \text{ si } p = n.}$

2. • Pour $p = 1$, il y a une seule application de I_n vers $I_1 = \{1\}$: c'est l'application constante égale à 1 et elle est surjective donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{n,1} = 1.}$

   • Pour $p = 2$, il y a 2^n applications de I_n vers $I_2 = [\![1, 2]\!]$. Elles sont toutes surjectives, hormis les deux applications constantes (celle égale à 1 et celle égale à 2).

   Il y a donc $2^n - 2$ applications surjectives de I_n vers I_2 donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{n,2} = 2^n - 2.}$

3. Dénombrons les applications $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ surjectives.
Si $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ est surjective, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe $x_k \in I_{p+1}$ tel que $f(x_k) = k$. Les images des p éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont donc imposées. Il reste un élément $x_{p+1} \in I_{p+1}$ dont il faut choisir l'image dans I_p. Cette image $f(x_{p+1})$ aura nécessairement deux antécédents.
Ainsi, si $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ est surjective, un élément de I_p admet deux antécédents, et les $p-1$ autres en admettent exactement un.
Pour construire une telle application surjective, on commence par choisir l'élément de I_p qui aura deux antécédents : il y a p façons de choisir cet élément dans I_p.
Il faut ensuite choisir les deux antécédents de cet élément dans I_{p+1} : il y a $\binom{p+1}{2}$ façons de le faire, soit $\frac{p(p+1)}{2}$ possibilités.
Enfin, il faut mettre en bijection les $p-1$ éléments restants de I_{p+1} avec les $p-1$ éléments restants de I_p : il y a $(p-1)!$ façons de le faire.
Finalement, il y a $p \times \frac{p(p+1)}{2} \times (p-1)! = (p+1)! \times \frac{p}{2}$ surjections de I_{p+1} vers I_p donc $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \frac{p}{2}.}$

Partie II : Cas général

1. Si $n \geqslant p$, il existe au moins une surjection de I_n vers I_p, par exemple l'application
$$\begin{array}{rcl} f : I_n & \longrightarrow & I_p \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \leqslant p \\ p & \text{si } k \geqslant p \end{cases} \end{array}$$
On en déduit que $\boxed{S_{n,p} > 0.}$

2. On a d'après la formule du binôme de Newton :
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k 1^{p-k} = (1-1)^p = 0^p.$$
Or, p est un entier naturel non nul donc $0^p = 0$, ce qui prouve que $\boxed{\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0.}$

3. (a) Puisque $k \leqslant l \leqslant p$, on a $k \leqslant p$ et $l - k \leqslant p - k$ donc
$$\binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{(p-k)!}{(l-k)!(p-k-(l-k))!} = \frac{p!}{l!(p-l)!} \frac{l!}{k!(l-k)!}$$
d'où $\boxed{\binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}.}$

(b) • Supposons que $k < p$. D'après la question précédente, on a
$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}.$$
En posant le changement d'indice $i = l - k$, on trouve
$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k} \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^{i+k} \binom{p-k}{i} = (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^i \binom{p-k}{i}.$$

Puisque $k < p$, on a $p - k > 0$ donc en appliquant le résultat de la question 2 de la partie II, on obtient $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-k}(-1)^i\binom{p-k}{i} = 0$.

On en déduit donc que $\boxed{\text{si } k < p, \displaystyle\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k} = 0.}$

- Si $k = p$, on trouve

$$\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k} = \sum_{l=p}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{p} = (-1)^p\binom{p}{p}\binom{p}{p}$$

d'où

$$\boxed{\text{si } k = p, \sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k} = (-1)^p.}$$

4. Soit $k \in I_p$. Pour construire une application f de I_n vers I_p dont l'image contient k éléments, il faut commencer par choisir les k éléments de I_p qui vont former l'image de f, ce qui peut se faire de $\displaystyle\binom{p}{k}$ façons.

   Il faut ensuite construire une surjection de I_n vers $\mathrm{Im}(f)$, c'est à dire une surjection de I_n vers un ensemble à k éléments (qui est donc en bijection avec I_k) : cela peut se faire de $S_{n,k}$ façons.

   $\boxed{\text{Finalement, il y a } \binom{p}{k} S_{n,k} \text{ applications de } I_n \text{ vers } I_p \text{ dont l'image contient } k \text{ élements.}}$

5. Pour tout $k \in I_p$, notons A_k l'ensemble des applications de I_n vers I_p dont l'image contient k éléments.

   On rappelle qu'on note $I_p^{I_n}$ l'ensemble des applications de I_n vers I_p. On a alors

$$I_p^{I_n} = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k$$

   où l'union est disjointe puisque pour toute application $f \in I_p^{I_n}$, il existe un unique entier $k \in I_p$ tel que $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f)) = k$.

   On obtient alors $\mathrm{Card}(I_p^{I_n}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Card}(A_k)$.

   Or, on sait que $\mathrm{Card}(I_p^{I_n}) = \mathrm{Card}(I_p)^{\mathrm{Card}(I_n)} = p^n$ et d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1,p]\!], \mathrm{Card}(A_k) = \displaystyle\binom{p}{k}S_{n,k}$.

   On trouve donc bien $\boxed{p^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}S_{n,k}.}$

6. D'après la question précédente, on a pour tout $l \in [\![1,p]\!], l^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{l}\binom{l}{k}S_{n,k}$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
(-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}l^n &= (-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\sum_{k=1}^{l}\binom{l}{k}S_{n,k}\\
&= (-1)^p\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{l}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}S_{n,k}\\
&= (-1)^p\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}S_{n,k}\\
&= (-1)^p\sum_{k=1}^{p}S_{n,k}\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 3.b) de la partie II, on sait que $\displaystyle\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k}=0$ si $k<p$ et vaut $(-1)^p$ si $k=p$. Il ne reste donc dans la double somme que le terme pour $k=p$.
Il en découle que

$$(-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}l^n=(-1)^pS_{n,p}\sum_{l=p}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{p}=(-1)^p(-1)^pS_{n,p}=(-1)^{2p}S_{n,p}=S_{n,p}$$

donc

$$\boxed{S_{n,p}=(-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}l^n.}$$

Partie III : Calcul par récurrence des $S_{n,p}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit $0<p\leqslant n-1$.
Soit φ une surjection de I_n vers I_p. Il y a $S_{n,p}$ façons de choisir φ.
Soit φ_1 la restriction de φ à I_{n-1}.
Il y a deux cas qui s'excluent :
• Supposons que $\varphi_1 : I_{n-1}\longrightarrow I_p$ est surjective (ce qui est possible car $n-1\geqslant p$). Il y a $S_{n-1,p}$ surjections de $I_{n-1,p}$. Il reste à fixer ensuite $\varphi(n)\in I_p$, ce qui laisse p choix.
Ainsi, il y a $pS_{n-1,p}$ surjections de I_n vers I_p dont la restriction à I_{n-1} est surjective.
• Supposons que $\varphi_1 : I_{n-1}\longrightarrow I_p$ n'est pas surjective.
Par surjectivité de φ, pour tout $k\in I_p$, il existe $x_k\in I_n$ tel que $\varphi(x_k)=k$.
Puisque φ_1 n'est pas surjective, ceci signifie que $\varphi(n)$ a un seul antécédent dans I_n, qui est forcément n (s'il en avait plus, il existerait $x_n\in I_{n-1}$ tel que $\varphi_1(x_n)=\varphi(n)$ et pour tout $k\in I_{p-1}\setminus\{\varphi(n)\}$, il existe $x_k\in I_{n-1}$ tel que $\varphi_1(x_k)=k$ donc φ_1 serait surjective).
Il y a p possibilités pour choisir $\varphi(n)$ dans I_p.
A ce stade, $\mathrm{Im}(\varphi_1)\subset I_p\setminus\{\varphi(n)\}$.
Toujours par surjectivité de φ, puisque pour tout $k\in I_p\setminus\{\varphi(n)\}$, il existe $x_k\in I_{n-1}$ tel que $\varphi(x_k)=k$, on a $\mathrm{Im}(\varphi_1)=I_p\setminus\{\varphi(n)\}$, i.e. $\varphi_1 : I_{n-1}\longrightarrow I_p\setminus\{\varphi(n)\}$ est surjective.
Or, $I_p\setminus\{\varphi(n)\}$ est de cardinal $p-1$ donc est en bijection avec I_{p-1} et il y a $S_{n-1,p-1}$ surjections de I_{n-1} vers I_{p-1}.
Ainsi, il y a $pS_{n-1,p-1}$ surjections de I_n vers I_p dont la restriction à I_{n-1} n'est pas surjective.

En sommant les deux possibilités, on trouve bien que

$$\boxed{\text{si } 0 < p \leqslant n-1, S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}).}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   • D'après la formule trouvée en question précédente, on a (puisque $0 < p \leqslant (p+1)-1$) :

$$S_{p+1,p} = p(S_{p,p} + S_{p,p-1}).$$

D'après la question 1 de la partie I, on sait que $S_{p,p} = p!$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{p+1,p} = p(p! + S_{p,p-1}).$$

Montrons alors par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}$.
Initialisation : Pour $p = 1$, on a $S_{p+1,p} = S_{2,1} = 1$ d'après la question 2 de la partie I.
D'autre part, $(p+1)! \times \dfrac{p}{2} = 2! \times \dfrac{1}{2} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang $p = 1$.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p+1,p} = (p+1)!\dfrac{p}{2}$.
Montrons la propriété au rang $p+1$, i.e. $S_{p+2,p+1} = (p+2)! \times \dfrac{p+1}{2}$.
On sait que

$$S_{p+2,p+1} = (p+1)((p+1)! + S_{p+1,p}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$S_{p+2,p+1} = (p+1)\left((p+1)! + (p+1)!\frac{p}{2}\right) = (p+1)(p+1)!\frac{p+2}{2} = (p+2)! \times \frac{p+1}{2},$$

ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.
On a donc bien retrouvé que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}.}$

• Toujours d'après la formule de la question précédente, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{p+2,p} = p(S_{p+1,p} + S_{p+1,p-1}) = p\left((p+1)! \times \frac{p}{2} + S_{p+1,p-1}\right).$$

Montrons alors par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$.
Initialisation : Pour $p = 1$, on a encore $S_{p+2,p} = S_{3,1} = 1$.
D'autre part, $\dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24} = \dfrac{1 \times 4 \times 3!}{24} = \dfrac{4 \times 6}{24} = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang $p = 1$.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$.
Montrons la propriété au rang $p+1$, i.e.

$$S_{p+3,p+1} = \frac{(p+1)(3(p+1)+1)(p+3)!}{24} = \frac{(p+1)(3p+4)(p+3)!}{24}.$$

On sait que $S_{p+3,p+1} = (p+1)\left((p+2)! \times \dfrac{p+1}{2} + S_{p+2,p}\right)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\begin{aligned}
S_{p+3,p+1} &= (p+1)\left((p+2)! \times \frac{p+1}{2} + \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}\right) \\
&= (p+1)(p+2)!\frac{12p+12+3p^2+p}{24} \\
&= (p+1)(p+2)!\frac{3p^2+13p+12}{24} \\
&= (p+1)(p+2)!\frac{(3p+4)(p+3)}{24} \\
&= \frac{(p+1)(3p+4)(p+3)!}{24},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout}\, p \in \mathbb{N}^*, S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}.}$

3. Grâce aux formules montrées précédemment, on peut construire la table des $S_{n,p}$ de proche en proche :

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	2			
$n=3$	1	6	6		
$n=4$	1	14	36	24	
$n=5$	1	30	150	240	120

En effet, les formules $S_{n,1} = 1$ et $S_{n,n} = n!$ permettent de remplir les termes extrêmes. Les formules $S_{p+1,p}$ et $S_{p+2,p}$ permettent ensuite de remplir toutes les cases de ce tableau, hormis celle pour $n = 5$ et $p = 2$.

On la calcule grâce à la formule $S_{5,2} = 2(S_{4,2} + S_{4,1}) = 2(14 + 1) = 30$.