Devoir maison n°4
A rendre pour le lundi 2 novembre 2026

Problème 1: Méthode de Cardan

Le but de ce problème est de trouver une méthode pour obtenir les racines (complexes) d'une équation de degré 3. On admettra qu'une équation de degré 3 à cœfficients complexes admet au plus trois racines complexes.

Partie I: Préliminaires

On rappelle qu'on note j le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = z_0^3$ sur $\mathbb{C}$ est $\{z_0, jz_0, j^2z_0\}$.

2. Donner l'ensemble des solutions des équations $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ sur $\mathbb{C}$.

Partie II: Résolution d'une équation de degré 3.

On considère l'équation de degré 3 suivante:

$$(E) : x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ et en déduire que l'équation (E) admet trois solutions réelles distinctes.

2. Soit x une solution de (E), et h un nombre complexe fixé. On pose $z = x + h$.

   Déterminer une équation de degré 3 vérifiée par z. Montrer que pour une valeur de h bien choisie, l'équation obtenue ne comporte pas de terme de degré 2.

3. On considère désormais l'équation $(E') : z^3 - 3z - 1 = 0$.

   Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. On suppose que:

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} U + V & = & 1 \\ uv & = & 1. \end{array} \right. \quad (*)$$

   (a) Montrer que $u + v$ est racine de l'équation (E').

   (b) A l'aide des valeurs de $U + V$ et de UV, déterminer un trinôme du second degré à cœfficients réels dont U et V sont les racines.

   (c) Calculer U et V, les écrire sous forme exponentielle, puis en déduire toutes les paires $\{u, v\}$ respectant $(*)$. *On pourra utiliser les résultats de la Partie I.*

   (d) Donner les trois racines de (E').

4. Résoudre (E).

Problème 2: Birapport de quatre nombres complexes

On rappelle que si $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ sont trois points deux à deux distincts du plan $\mathbb{R}^2$, ils sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement s'il existe un réel λ non nul tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$

Dans tout ce problème, on identifiera les points du plan $\mathbb{R}^2$ à leurs affixes complexes. On dira donc que trois nombres complexes a, b et c sont *alignés* si les trois points du plan A, B et C d'affixes respectives a, b et c le sont.
Ainsi, si a, b et c sont trois nombres complexes distincts, ils sont alignés si et seulement s'il existe un réel λ non nul tel que $(c-a) = \lambda(c-b)$.
Enfin, on rappelle qu'on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Etant donnés quatre nombres complexes a, b, c et d deux à deux distincts, on définit le *birapport* de a, b, c et d, noté $[a, b, c, d]$, par le nombre complexe

$$[a, b, c, d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}.$$

Le but de ce problème est de montrer que quatre nombres complexes deux à deux distincts sont alignés ou cocycliques (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même cercle) si et seulement si leur birapport est réel. La dernière question de ce problème est une application de ce résultat.

1. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On suppose que a, b et c sont alignés. Montrer que les quatre points a, b, c et d sont alignés si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

2. Soient α, β, γ trois réels et z un nombre complexe. On suppose que $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts.

   (a) Traduire le fait que $e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}, e^{i\alpha} \neq e^{i\gamma}$ et $e^{i\beta} \neq e^{i\gamma}$ à l'aide de congruences. En déduire que $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls.

   (b) Montrer que

   $$[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{(z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})}{|z-e^{i\alpha}|^2}.$$

   (c) Montrer que

   $$e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha}) = |z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + D$$

   où D est un réel que l'on exprimera en fonction de z, α et β.

   (d) En déduire que

   $$\mathrm{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}.$$

   (e) En conclure que $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.

3. Dans cette question, a, b, c et d sont quatre nombres complexes deux à deux distincts doint trois quelconques ne sont pas alignés. Puisque a, b et c ne sont pas alignés, on peut considérer $\omega \in \mathbb{C}$ le centre du cercle circonscrit au triangle abc. On rappelle que ω est le point d'intersection des médiatrices du triangle abc et qu'on a donc

$$|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c| = R$$

où R est un réel strictement positif.

   (a) Expliciter deux complexes λ et μ tels que $\lambda a + \mu = 1$ et $\lambda\omega + \mu = 0$.

   Dans la suite de cette question, on pose pour tout $z \in \mathbb{C}, h(z) = \lambda z + \mu$.

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|h(z)| = 1$ si et seulement si $|\omega - z| = R$. En déduire l'existence de trois réels α, β, γ tels que $h(a) = e^{i\alpha}, h(b) = e^{i\beta}$ et $h(c) = e^{i\gamma}$.

   (c) Montrer que $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est bijective. En déduire que les quatre nombres complexes $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts.

   (d) On pose $z = h(d)$. Montrer que $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = [a, b, c, d]$.

   (e) En déduire que $[a, b, c, d]$ est réel si et seulement si $|\omega - d| = R$.

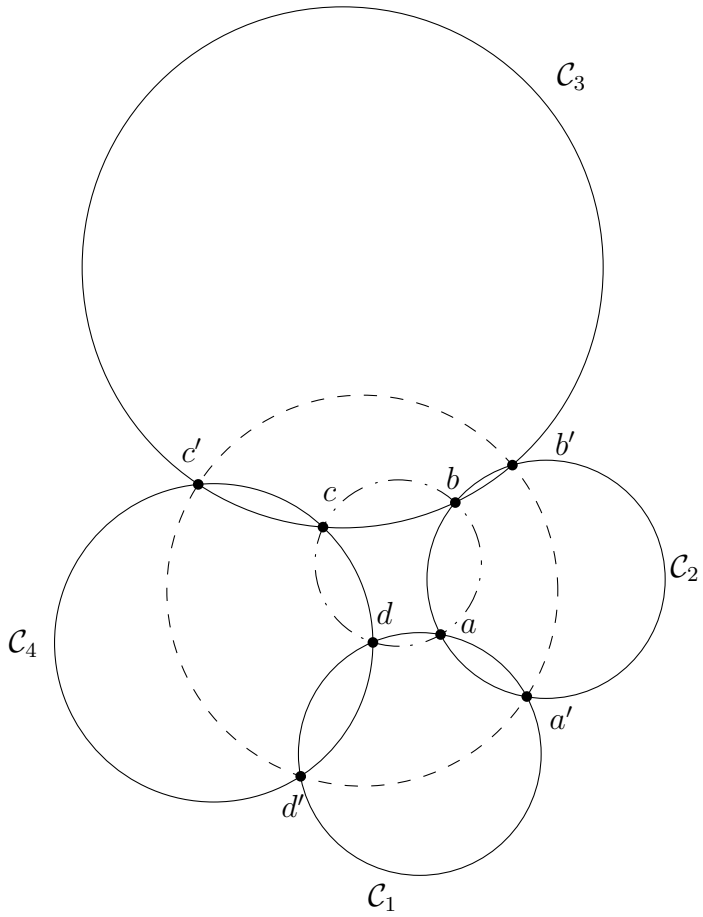
4. Déduire de ce qui précède que quatre nombres complexes deux à deux distincts sont alignés ou cocyliques si et seulement si leur birapport est réel.

5. On considère quatre cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. On suppose que:
   - $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points a et a';
   - $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en deux points b et b';
   - $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ se coupent en deux points c et c';
   - $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en deux points d et d';
   - les huits points précédents sont deux à deux distincts (voir figure ci-dessous).

   (a) Montrer la formule dite des six birapports:

$$[a, c, b, d] \times [a, d', d, a'] \times [a, b', a', b] \times [c', b, b', c] \times [c', a', d', b'] \times [c', d, c, d'] = 1.$$

   (b) Démontrer le théorème de Miquel suivant: a, b, c et d sont alignés ou cocycliques si et seulement si a', b', c' et d' le sont.


$\mathcal{C}_3$
c'
b'
c
b
$\mathcal{C}_2$
$\mathcal{C}_4$
d
a
a'
d'
$\mathcal{C}_1$