Lycée Fénelon | PCSI
Année 2025-2026 | A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°2

Samedi 11 octobre 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué de trois exercices, d'un problème et comporte 4 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Des boules dans une urne

On considère une urne contenant 5 boules bleues numérotées de 1 à 5, 2 boules blanches numérotées de 1 à 2 et 5 boules rouges numérotées de 1 à 5.
On tire simultanément 5 boules dans cette urne.
Des résultats exacts sont attendus. On ne laissera donc pas de résultats sous forme de cœfficients binomiaux ou de factorielles.

1. Combien y a-t-il de tirages en tout ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant les trois boules portant le numéro 1 ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule rouge ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement 3 boules rouges ?
5. Combien y a-t-il de tirages d'une seule couleur ? bicolores ? tricolores ?

Exercice 2 : Etude d'une fonction

Soit $f : x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer $f(n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que f est monotone, en précisant sa monotonie.
4. Calculer $f(0), f(3), f(4\pi)$ et $f(3e)$.
5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$:
   (a) $f(x) = \pi$;
   (b) $f(x) = -1$.
   (c) $f(x) = k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer l'image de l'application f. L'application f est-elle injective ?
7. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0, 10]$.
8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sqrt{n} - 1 < f(n) \leqslant \sqrt{n}.$$

On note $A = \left\{ \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

9. (a) Justifier que A admet une borne supérieure et une borne inférieure.
   (b) Déterminer la borne supérieure de A. Est-ce un maximum ?
   (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}}$. On notera l cette limite.
   (d) Démontrer que l est la borne inférieure de A. Est-ce un minimum ?
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} f(k)$.
    (a) Justifier que $S_n = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} ((i+1)^2 - i^2) i \right) + n$.
    (b) Calculer S_n.

Exercice 3 : Points fixes d'une permutation

Soit n un entier naturel non nul.
On dispose d'une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. On réalise l'expérience suivante : on tire successivement, et sans remise, toutes les boules de l'urne.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on dit que i est un **point fixe** du tirage si la boule i a été tirée à la i-ème position.
Exemple : si l'urne contient quatre boules, le tirage $(3,2,1,4)$ *admet* 2 *et* 4 *pour points fixes, mais le tirage* $(2,3,4,1)$ *n'admet pas de point fixe.*

Pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, on note $F(n,p)$ le nombre de tirages qui admettent exactement p points fixes.
Par convention, on pose également $F(0,0) = 1$.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
2. Pour tout $p \in [\![0;4]\!]$, calculer $F(4,p)$.
3. Evaluer $F(n,n)$ et $F(n,n-1)$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F(n,k) = n!$.

   Posons $\omega_n = F(n,0)$, le nombre de tirages sans point fixe.
5. Montrer que, pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, on a $F(n,k) = \displaystyle\binom{n}{k}\omega_{n-k}$.
6. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} = 1$.
7. (a) Montrer que
$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!}.$$
   (b) En raisonnant par récurrence forte, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Problème : Nombre de surjections entre ensembles finis

Le but de ce problème est de dénombrer les surjections entre intervalles d'entiers.
On note pour tout entier naturel n non nul l'intervalle d'entiers $I_n = [\![1, n]\!]$.
Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (n, p), on appelle $S_{n,p}$ le nombre de surjections de I_n vers I_p.

Partie I : Premiers exemples

1. Que vaut $S_{n,p}$ si $p > n$? Et si $p = n$?
2. Calculer $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $S_{p+1,p}$ pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, on considère deux entiers naturels non nuls p et n tels que $n \geqslant p$.

1. Justifier que $S_{n,p} > 0$.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0$.
3. Soient k et l des entiers naturels tels que $k \leqslant l \leqslant p$.
   (a) Vérifier que $\displaystyle\binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}$.
   (b) En déduire que si $k < p$, alors $\displaystyle\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = 0$. Que peut-on dire si $k = p$?
4. Montrer que pour tout entier $k \in I_p$, le nombre d'applications de I_n vers I_p dont l'image contient k éléments vaut $\displaystyle\binom{p}{k} S_{n,k}$.
5. En déduire que $\displaystyle p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$.
6. En conclure que $\displaystyle S_{n,p} = (-1)^p \sum_{l=1}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} l^n$.

Partie III : Calcul par récurrence des $S_{n,p}$

On suppose toujours que n est un entier naturel non nul.

1. Montrer que si $0 < p \leqslant n - 1$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
   Indication : étant donné une surjection φ de I_n vers I_p, considérer sa restriction φ_1 à I_{n-1} et discuter selon le caractère surjectif ou non de φ_1.
2. Retrouver la valeur de $S_{p+1,p}$, puis montrer que $\displaystyle S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
3. En s'inspirant du triangle de Pascal, montrer qu'on peut construire une table des $S_{n,p}$.
   Construire cette table pour $0 < p \leqslant n \leqslant 5$.