Corrigé du devoir maison n°4

Problème 1: Méthode de Cardan

Partie I: Préliminaires

1. On a $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \dfrac{z^3}{z_0^3} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^3 = 1$.

   Or, puisque $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, ceci équivaut à $\dfrac{z}{z_0} \in \{1, j, j^2\}$.

   Ainsi, $\dfrac{z}{z_0} = 1$ ou $\dfrac{z}{z_0} = j$ ou $\dfrac{z}{z_0} = j^2$ d'où $z = z_0$ ou $z = jz_0$ ou $z = j^2 z_0$.

   On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = z_0^3$ est $\{z_0, jz_0, j^2 z_0\}$.

2. • On a $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$.

   D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{\frac{i\pi}{9}}, je^{\frac{i\pi}{9}}, j^2 e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}}$.

   • On a $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$.

   D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, je^{-\frac{i\pi}{9}}, j^2 e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}} e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}}$.

Partie II: Résolution d'une équation de degré 3.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

   D'après le théorème sur le signe d'un trinôme du second degré (ici, son cœfficient dominant est positif et ses racines sont 1 et 3), on en déduit que

   $$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\text{ et } f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1, 3]$$

   donc f est croissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $[3, +\infty[$ et décroissante sur $[1, 3]$.

   De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   De même, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

En calculant $f(1) = 1$ et $f(3) = -3$, on obtient le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-∞	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur les trois intervalles $]-\infty, 1]$, $[1, 3]$ et $[3, +\infty[$, on en déduit qu'il existe $x_1 \in]-\infty, 1[$, $x_2 \in]1, 3[$ et $x_3 \in]3, +\infty[$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet donc bien trois solutions réelles distinctes.}}$

2. On a $x = z - h$. L'équation (E) devient alors

$$\begin{aligned}
(E): \quad & (z-h)^3 - 6(z-h)^2 + 9(z-h) - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & z^3 - 3hz^2 + 3h^2z - h^3 - 6z^2 + 12hz - 6h^2 + 9z - 9h - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & z^3 + (-3h-6)z^2 + (3h^2 + 12h + 9)z - h^3 - 6h^2 - 9h - 3 = 0.
\end{aligned}$$

En posant $h = -2$, on en déduit que $z = x - 2$ vérifie l'équation

$$\boxed{(E'): z^3 - 3z - 1 = 0.}$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 - 3(u+v) - 1 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v - 1 \\
&= U + V + 3u(uv) + 3v(uv) - 3u - 3v - 1 \\
&= 1 + 3u + 3v - 3u - 3v - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $\boxed{u + v \text{ est bien racine de } (E').}$

(b) On a $U + V = 1$ et $UV = u^3v^3 = (uv)^3 = 1$. D'après les relations cœfficients-racines, U et V sont racines du trinôme du second degré $X^2 - (U+V)X + UV = 0$, i.e.

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont les racines de } X^2 - X + 1 = 0.}$$

(c) Le discriminant du trinôme $X^2 - X + 1$ vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc les racines U et V de ce trinôme sont

$$\boxed{U = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } V = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

On a donc $u^3 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $v^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

D'après les résultats de la Partie I, les nombres complexes u tels que $u^3 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}$.

De même, les nombres complexes v tels que $v^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{-i\frac{\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}$.
Or, on veut que $u+v=1$ et $uv=1$.
La condition $uv=1$ impose le fait que u et v doivent être conjugués.
• Si $\{u,v\} = \{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{\pi}{9}}\}$, on a bien $uv=1$ et d'après la formule d'Euler,

$$U+V = u^3+v^3 = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

• Si $\{u,v\} = \{e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}$, on a de même $uv=1$ et $U+V = u^3+v^3 = 1$.
• Enfin, si $\{u,v\} = \{e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}$, on a également $uv=1$ et $U+V = u^3+v^3 = 1$.
Finalement, les paires $\{u,v\}$ possibles sont

$$\boxed{\{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{\pi}{9}}\}, \{e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{\frac{-5i\pi}{9}}\}, \{e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{\frac{-7i\pi}{9}}\}.}$$

(d) D'après la question 3.(a) de la Partie II, si $\{u,v\}$ vérifie $(*)$, alors $u+v$ est racine de (E').
D'après la question précédente, on obtient trois racines différentes pour (E') :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{9}} + e^{-i\frac{\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right);\ z_2 = e^{\frac{5i\pi}{9}} + e^{-\frac{5i\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right);\ z_3 = e^{\frac{7i\pi}{9}} + e^{-\frac{7i\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right).$$

Elles sont bien différentes car $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}$ et $\frac{7\pi}{9}$ appartiennent à $[0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$.
Or, une équation de degré 3 admet au plus trois racines complexes.

$$\boxed{\text{Les racines de } (E') \text{ sont donc } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right); 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right); 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right\}.}$$

4. On a vu en deuxième question de la Partie II que x est racine de (E) si et seulement si $z = x-2$ est racine de (E'). Ainsi, z est racine de (E') si et seulement si $x = z+2$ est racine de (E).

$$\boxed{\text{Les racines de } (E) \text{ sont donc } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+2; 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+2; 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)+2\right\}.}$$

Problème 2: Birapport de quatre nombres complexes

1. Puisque a, b et c sont alignés, il existe un réel λ non nul tel que $(c-a) = \lambda(c-b)$, i.e. $\dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$.
On a alors les équivalences suivantes:

$$[a,b,c,d] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda\frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R} \overset{\lambda\in\mathbb{R}^*}{\Longleftrightarrow} \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a,b,d \text{ sont alignés.}$$

Puisque a, b, c sont alignés, a, b, d sont alignés si et seulement si a, b, c et d sont alignés.
On a donc bien montré que $\boxed{[a,b,c,d] \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a,b,c \text{ et } d \text{ sont alignés.}}$

2. (a) On sait que $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta[2\pi]$.
Ainsi, puisque $e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}, e^{i\alpha} \neq e^{i\gamma}$ et $e^{i\beta} \neq e^{i\gamma}$, on a $\alpha \not\equiv \beta[2\pi], \alpha \not\equiv \gamma[2\pi]$ et $\beta \not\equiv \gamma[2\pi]$ d'où $\dfrac{\alpha-\beta}{2} \not\equiv 0[\pi], \dfrac{\alpha-\gamma}{2} \not\equiv 0[\pi]$ et $\dfrac{\beta-\gamma}{2} \not\equiv 0[\pi]$.
Puisque $\sin(\theta) \in \mathbb{R} = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi]$, on en déduit que

$$\boxed{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \text{ sont non nuls.}}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] &= \frac{(e^{i\gamma}-e^{i\alpha})(z-e^{i\beta})}{(z-e^{i\alpha})(e^{i\gamma}-e^{i\beta})} \\
&= \frac{e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\gamma-\alpha}{2}})(z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})}{(z-e^{i\alpha})(\overline{z}-e^{-i\alpha})e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\gamma-\beta}{2}})} \\
&= \frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times 2i\sin(\frac{\gamma-\alpha}{2})(z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})}{(z-e^{i\alpha})(\overline{z-e^{i\alpha}}) \times 2i\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})} \\
&= \frac{-e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})(z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})}{-|z-e^{i\alpha}|^2 \times \sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \dfrac{(z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})}{|z-e^{i\alpha}|^2}.}$

(c) On a

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha}) &= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}(|z|^2 - e^{-i\alpha}z - e^{i\beta}\overline{z} + e^{i(\beta-\alpha)}) \\
&= |z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\overline{z}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha}) = |z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + D}$ où

$$D = -e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\overline{z} = -\left(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z + \overline{e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z}\right) = -2\mathrm{Re}\left(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}z\right) \in \mathbb{R}.$$

(d) Puisque $\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \times |z-e^{i\alpha}|^2} \in \mathbb{R}$, en utilisant le résultat de la question b, on a

$$\mathrm{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \times |z-e^{i\alpha}|^2} \times \mathrm{Im}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})).$$

D'après la question précédente, on a par ailleurs $\mathrm{Im}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times (z-e^{i\beta})(\overline{z}-e^{-i\alpha})) = \mathrm{Im}(|z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}})$ car $D \in \mathbb{R}$.
Or, $|z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} = |z|^2(\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) + i\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})) + (\cos(\frac{\beta-\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\beta-\alpha}{2}))$ d'où

$$\mathrm{Im}(|z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}) = |z|^2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = (|z^2|-1)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

par imparité de sin .

On trouve bien $\boxed{\mathrm{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \dfrac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}.}$

(e) D'après la question a), $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right), \sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls donc on a bien les équivalences

$$\begin{aligned}
\boxed{[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R}} &\Leftrightarrow \mathrm{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow |z| = 1 \quad \text{car } |z| \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \boxed{z \in \mathbb{U}.}
\end{aligned}$$

3. (a) On cherche à résoudre le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda a + \mu &=& 1 \\ \lambda\omega + \mu &=& 0 \end{array} \right. \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda(a-\omega) &=& 1 \\ \lambda\omega + \mu &=& 0 \end{array} \right. \overset{a \neq \omega}{\Longleftrightarrow} \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda &=& \frac{1}{a-\omega} \\ \mu &=& -\frac{\omega}{a-\omega} \end{array} \right.}.$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $h(z) = \lambda z + \mu = \dfrac{z-\omega}{a-\omega}$.

On a alors les équivalences

$$|h(z)| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-\omega|}{|a-\omega|} = 1 \Leftrightarrow |z-\omega| = |a-\omega|.$$

Puisque $|a-\omega| = R$, on en déduit que $\boxed{|h(z)| = 1 \Leftrightarrow |\omega - z| = R.}$

Puisque $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c| = R$, on déduit de ce qui précède que $|h(a)| = |h(b)| = |h(c)| = 1$.

Par caractérisation des nombres complexes de module 1, on en déduit qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $\boxed{h(a) = e^{i\alpha}, h(b) = e^{i\beta} \text{ et } h(c) = e^{i\gamma}.}$

(c) Soit $z' \in \mathbb{C}$. Montrons qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $h(z) = z'$. On a les équivalences suivantes:

$$h(z) = z' \Leftrightarrow \frac{z-\omega}{a-\omega} = z' \Leftrightarrow z = (a-\omega)z' + \omega$$

donc tout nombre complexe z' admet un unique antécédent dans $\mathbb{C}$ par h, ce qui prouve que $\boxed{h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ est bijective.}}$

En particulier, h est injective, ce qui signifie que deux nombres complexes différents ont des images différentes par h.

Puisque a, b, c et d sont deux à deux distincts, on en déduit que $h(a), h(b), h(c)$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts, i.e. $\boxed{e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma} \text{ et } h(d) \text{ sont deux à deux distincts.}}$

(d) On pose $z = h(d)$. D'après la question précédente, $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts, ce qui permet de calculer leur birapport. Par définition, on a

$$[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = [h(a), h(b), h(c), h(d)] = \frac{(h(c) - h(a))(h(d) - h(b))}{(h(d) - h(a))(h(c) - h(b))}.$$

Or, $h(c) - h(a) = \dfrac{c-\omega}{a-\omega} - \dfrac{a-\omega}{a-\omega} = \dfrac{c-a}{a-\omega}$. Les autres calculs étant similaires, on obtient

$$[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = \frac{\frac{c-a}{a-\omega}\frac{d-b}{a-\omega}}{\frac{d-a}{a-\omega}\frac{c-b}{a-\omega}} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

d'où $\boxed{[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] = [a, b, c, d]}$.

(e) On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \boxed{[a,b,c,d] \in \mathbb{R}} &\Leftrightarrow [e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &\Leftrightarrow z = h(d) \in \mathbb{U} \quad \text{d'après } 2.(e) \\ &\Leftrightarrow \boxed{|\omega - d| = R} \quad \text{d'après } 3.(b) \end{aligned}$$

4. Soient a, b, c, d quatre nombre complexes deux à deux distincts.

• Supposons que trois de ces quatre points sont alignés. D'après la question 1, leur birapport est réel si et seulement si ces quatre points sont alignés.

• Supposons que trois quelconques de ces quatre points ne sont pas alignés. Notons ω le centre du cercle circonscrit du triangle abc, qui est de rayon R. D'après la question précédente, leur birapport est réel si et seulement si d appartient au cercle de centre ω et de rayon R, c'est à dire si et seulement si a, b, c et d sont cocycliques.

Finalement,

$$\boxed{a, b, c, d \text{ sont alignés ou cocycliques si et seulement si } [a, b, c, d] \in \mathbb{R}.}$$

5. (a) C'est un simple calcul:

$$\begin{aligned} & \boxed{[a,c,b,d] \times [a,d',d,a'] \times [a,b',a',b] \times [c',b,b',c] \times [c',a',d',b'] \times [c',d,c,d']} \\ = \; & \frac{(b-a)(d-c)}{(d-a)(b-c)} \frac{(d-a)(a'-d')}{(a'-a)(d-d')} \frac{(a'-a)(b-b')}{(b-a)(a'-b')} \frac{(b'-c')(c-b)}{(c-c')(b'-b)} \frac{(d'-c')(b'-a')}{(b'-c')(d'-a')} \frac{(c-c')(d'-d)}{(d'-c')(c-d)} \\ = \; & \frac{(d-c)(a'-d')(b-b')(c-b)(b'-a')(d'-d)}{(c-d)(d'-a')(b'-b)(b-c)(a'-b')(d-d')} \\ = \; & (-1)^6 \\ = \; & \boxed{1}. \end{aligned}$$

(b) Puisque a, a', d, d' appartiennent au cercle $\mathcal{C}_1$, ils sont cocycliques donc $[a, d', d, a'] \in \mathbb{R}$. En raisonnant sur les cercles $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, on montre de même que $[a, b', a', b] \in \mathbb{R}, [c', b, b', c] \in \mathbb{R}$ et $[c', d, c, d'] \in \mathbb{R}$.

• Supposons que a, b, c, d sont alignés ou cocycliques. D'après la question 4, on en déduit que $[a, c, b, d]$ est réel.

D'après la question précédente et les constatations précédentes, on en déduit que

$$[c', a', d', b'] = \frac{1}{[a,c,b,d] \times [a,d',d,a'] \times [a,b',a',b] \times [c',b,b',c] \times [c',d,c,d']} \in \mathbb{R},$$

ce qui implique d'après la question 4 que a', b', c' et d' sont alignés ou cocycliques.

• Réciproquement, supposons que a', b', c', d' sont alignés ou cocycliques. D'après la question 4, on en déduit que $[c', a', d', b']$ est réel.

D'après la question précédente et les constatations précédentes, on en déduit que

$$[a, c, b, d] = \frac{1}{[a, d', d, a'] \times [a, b', a', b] \times [c', b, b', c] \times [c', a', d', b'] \times [c', d, c, d']} \in \mathbb{R},$$

ce qui implique d'après la question 4 que a, b, c et d sont alignés ou cocycliques.

On en conclut que

a, b, c, d sont alignés ou cocyliques si et seulement si a', b', c', d' le sont.