8

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

8.1 Généralités

8.1.1 Ensemble de définition

Définition 1: Ensemble de définition

Une fonction à valeurs réelles est une application f définie sur une partie $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle ensemble (ou domaine) de définition de f l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \text{ existe}\}.$$

Exemple 1. • L'application $f : x \longmapsto |x|$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
• L'application $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$.
• L'application $f : x \longmapsto \dfrac{x+3}{x-5}$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

8.1.2 Courbe représentative

Définition 2: Courbe représentative d'une fonction à valeurs réelles

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ une application.
On appelle courbe représentative (ou graphe) de f, et on note $\mathcal{C}_f$, la courbe

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) | x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, un point du plan (x, y) appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$.

Remarque 1. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, il existe un unique point d'abscisse x sur la courbe $\mathcal{C}_f$: c'est le point $(x, f(x))$.

Exercice 1. Soit $f : x \longmapsto x^2$.
Tracer les graphes des applications $x \mapsto f(x) + 2, x \mapsto f(2 - x), x \mapsto f(2x)$ et $x \mapsto 2f(x)$.

8.1.3 Opérations algébriques sur les fonctions

Définition 3: Opérations algébriques sur les fonctions

Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\lambda f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par
$$(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x).$$
2. On définit la fonction $f + g : \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \longrightarrow$ définie pour tout $x \in \mathcal{D}_\cap \mathcal{D}_g$ par
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
3. On définit la fonction $f \times g : \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \longrightarrow$ définie pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par
$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f^n : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par
$$f^n(x) = (f(x))^n.$$
5. On définit la fonction $\dfrac{f}{g} : \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g | g(x) \neq 0\}$ par
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemple 2. La fonction cotan : $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} | \sin(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} | x \not\equiv 0[\pi]\}.$$

8.1.4 Parité

Définition 4: Fonctions paires, fonctions impaires

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine, i.e. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, alors $-x \in \mathcal{D}_f$.

• On dit que la fonction f est paire si
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x).$$

• On dit que la fonction f est impaire si
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x).$$

Exemple 3. • Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $f : x \mapsto x^n$ est paire (resp. impaire) si n est pair (resp. impair).

En effet, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine.

- Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k} = ((-x)^2)^k = (x^2)^k = x^{2k} = x^n = f(x)$$

donc la fonction f est paire.

- Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x \times (-x)^{2k} = -x \times x^{2k} = -x^{2k+1} = -x^n = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire.

• De même, pour $n \in \mathbb{Z}$, l'application $f : x \mapsto x^n$ est paire (resp. impaire) si n est pair (resp. impair) mais ici $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ (qui est encore symétrique par rapport à l'origine).

• On a vu dans le chapitre « Trigonométrie »que l'application cosinus est paire, tandis que les applications sinus et tangentes sont impaires.

Proposition 1: Courbe représentative d'une fonction paire/impaire

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, où $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Si f est paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Si f est impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Démonstration.

1. Supposons que f est paire. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}_f$. Par définition, ceci implique que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Le symétrique de (x, y) par rapport à l'axe des ordonnées est le point $(-x, y) = (-x, f(x))$. Or, ce dernier appartient également à $\mathcal{C}_f$ puisque $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$ puisque f est paire.
   Ainsi, si un point appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$, cette dernière possède également son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui prouve que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Supposons que f est impaire. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}_f$. Par définition, ceci implique que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Le symétrique de (x, y) par rapport à l'origine est le point $(-x, -y) = (-x, -f(x))$. Or, ce dernier appartient également à $\mathcal{C}_f$ puisque $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$ puisque f est impaire.
   Ainsi, si un point appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$, cette dernière possède également son symétrique par rapport à l'origine, ce qui prouve que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

■

Remarque 2. • Soit $f : \mathcal{D}_f$ une fonction paire. Pour tracer la courbe représentative de f, il suffit donc d'étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$, de tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et de la prolonger par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

• Soit $f : \mathcal{D}_f$ une fonction impaire. Pour tracer la courbe représentative de f, il suffit donc d'étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$, de tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et de la prolonger par symétrie par rapport à l'origine.

Proposition 2: Parties paire et impaire

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, où $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
Alors il existe une unique fonction paire g et une unique fonction impaire h définies sur $\mathcal{D}_f$ telles que

$$f = g + h.$$

On a alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

L'application g est appelée la partie paire de f et l'application h est appelée la partie impaire de f.

Démonstration. Nous allons faire un raisonnement par analyse-synthèse : pour montrer l'existence et l'unicité des parties paire et impaire, nous allons d'abord supposer leur existence, montrer leur unicité si existence, puis enfin vérifier leur existence.

• **Analyse :** Supposons qu'il existe une fonction paire g et une fonction impaire h définies sur $\mathcal{D}_f$ telles que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = g(x) + h(x)$.

On a alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ en utilisant la parité de g et l'imparité de h.

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{g(x) + h(x) + g(x) - h(x)}{2} = g(x)$$

et

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{g(x) + h(x) - (g(x) - h(x))}{2} = h(x).$$

Ceci prouve que si la partie paire g et la partie impaire h existent, alors nécessairement elles sont définies pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a donc bien prouvé l'unicité (si existence) des parties paire et impaire de f.

• **Synthèse :** Vérifions maintenant qu'il existe bien une fonction paire g et une fonction impaire h définies sur $\mathcal{D}_f$ telles que $f = g + h$.

Posons pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Tout d'abord, on remarque qu'on a bien pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = g(x) + h(x)$.

Ensuite, vérifions que g est paire : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$$

donc g est bien une fonction paire.

Enfin, vérifions que h est une fonction impaire : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{-f(x) + f(-x)}{2} = -h(x)$$

donc h est bien une fonction impaire.

On a donc bien prouvé l'existence d'une fonction g paire et d'une fonction h impaire telles que $f = g + h$.

• **Conclusion :** Finalement, on a prouvé l'existence et l'unicité des parties paire et impaire d'une fonction. ■

Exemple 4. Soit $f : x \longmapsto x^3 + 3x^2 - x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 4 + (-x^3 + 3x^2 + x + 4)}{2} = 3x^2 + 4$$

et

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 4 - (-x^3 + 3x^2 + x + 4)}{2} = x^3 - x.$$

Remarque 3. Si f est une fonction paire, sa partie paire est elle-même et sa partie impaire est la fonction nulle.

De même, si f est une fonction impaire, sa partie paire est la fonction nulle et sa partie impaire est elle-même.

8.1.5 Périodicité

Définition 5: Périodicité

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $T > 0$.
On dit que la fonction f est T-périodique si :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}_f$;
2. $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x + T) = f(x)$.

Exemple 5. On a vu dans le chapitre « Trigonométrie »que les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques tandis que la fonction tangente est π-périodique.

Proposition 3

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application T-périodique (où $T > 0$). On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Alors

$$(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow (x + T, f(x)) \in \mathcal{C}_f.$$

Autrement dit, la courbe représentative de f est invariante par la translation de vecteur $\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

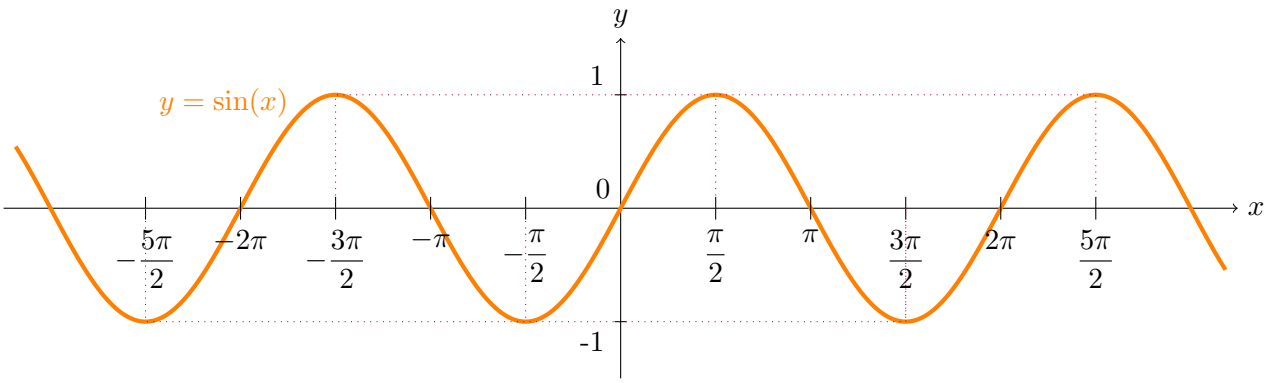
$$(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow (x + T, f(x)) \in \mathcal{C}_f.$$

■

Remarque 4. Si f est une fonction $T-$périodique, il suffit de l'étudier sur un ensemble de la forme $\mathcal{D}_f \cap [a, a + T]$ où a est un réel quelconque, de tracer sa courbe représentative sur cet ensemble, puis de la prolonger en utilisant l'invariance par translation.

Si, de plus, f est paire ou impaire, il suffit alors de l'étudier sur l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap [0; \frac{T}{2}]$, de la prolonger par symétrie sur $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ puis de la prolonger en utilisant l'invariance par translation.

Exemple 6. Pour étudier la fonction sinus qui est à la fois 2π-périodique et impaire, il suffit de l'étudier sur $[0; \pi]$, tracer sa courbe représentative sur cet intervalle, puis la prolonger sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie par rapport à l'origine, puis la prolonger sur $\mathbb{R}$ tout entier par invariance par translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.



8.1.6 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 6: Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.
• On dit que f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leqslant M.$$

Un tel réel M est appelé un majorant de la fonction f.
• On dit que f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que

$$\forall x \in I, f(x) \geqslant m.$$

Un tel réel m est appelé un minorant de la fonction f.
• On dit que f est bornée sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I.

Exemple 7. Les fonctions cosins et sinus sont majorées sur $\mathbb{R}$ par 1 et minorées sur $\mathbb{R}$ par -1.

Remarque 5. On retrouve les propriétés des parties de $\mathbb{R}$ majorées ou minorées vues dans le chapitre « Nombres réels », à savoir :

• Si f est majorée sur I, alors la partie $f(I)$ admet une borne supérieure qu'on note $\sup_{x\in I} f(x)$. Si cette borne supérieure appartient à $f(I)$, c'est à dire si c'est une valeur effectivement prise par f, on dit que c'est le maximum de f sur I et on la note $\max_{x\in I} f(x)$.

• Si f est minorée sur I, alors la partie $f(I)$ admet une borne inférieure qu'on note $\inf_{x\in I} f(x)$. Si cette borne inférieure appartient à $f(I)$, c'est à dire si c'est une valeur effectivement prise par f, on dit que c'est le minimum de f sur I et on la note $\min_{x\in I} f(x)$.

• Si f est bornée sur I, il existe un réel M positif tel que pour tout $x \in I, |f(x)| \leqslant M$.

Exemple 8. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f : [1, +\infty[& \longrightarrow &]0, 1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

L'application f est bornée sur $[1, +\infty[$ car pour tout $x \geqslant 1, |f(x)| \leqslant 1$.

On a $\inf_{x\geqslant 1} f(x) = 0$ mais 0 n'est pas une valeur prise par la fonction f; ce n'est donc pas un minimum.

En revanche, on a bien $\max_{x\geqslant 1}(f) = 1$.

8.1.7 Monotonie

Définition 7: Monotonie

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
• On dit que f est croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
• On dit que f est décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
• On dit que f est strictement croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
• On dit que f est strictement décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
• On dit que f est constante sur I si f est à la fois croissante et décroissante sur I, i.e. $\forall (x, y) \in I^2, f(x) = f(y)$.
On dit que f est monotone (resp. strictement monotone) si f est croissante ou décroissante (resp. strictement décroissante).

Exemple 9. • La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ et strictement croissante sur $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

• La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas strictement croissante car elle est constante sur tout intervalle de la forme $[n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 6. Si f est strictement croissante sur I, on a en fait une équivalence

$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

En effet, supposons que $f(x) < f(y)$ et montrons que $x < y$. Supposons par l'absurde que $x \geqslant y$. Alors par stricte croissance de f, on aurait $f(x) \geqslant f(y)$, ce qui contredit $f(x) < f(y)$. Donc $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

De même, si f est strictement décroissante sur I, on a en fait une équivalence

$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y).$$

Proposition 4: Monotonie et bijection réciproque

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. On considère $f^{-1} : F \longrightarrow E$ sa bijection réciproque.

1. Si f est strictement croissante sur E, alors f^{-1} est strictement croissante sur F.
2. Si f est strictement décroissante sur E, alors f^{-1} est strictement décroissante sur F.

Autrement dit, une application bijective a même monotonie que sa bijection réciproque.

Démonstration.

1. Soient $(y, y') \in F^2$ avec $y < y'$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Ainsi, $f(x) = y$ et $f(x') = y'$ donc $f(x) < f(x')$.

   Puisque f est strictement croissante sur E, alors

   $$f(x) < f(x') \Leftrightarrow x < x' \Leftrightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y'),$$

   ce qui prouve la stricte croissance de f^{-1}.

2. Soient $(y, y') \in F^2$ avec $y < y'$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Ainsi, $f(x) = y$ et $f(x') = y'$ donc $f(x) < f(x')$.

   Puisque f est strictement décroissante sur E, alors

   $$f(x) < f(x') \Leftrightarrow x > x' \Leftrightarrow f^{-1}(y) > f^{-1}(y'),$$

   ce qui prouve la stricte décroissance de f^{-1}.

■

Exemple 10. Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont toutes deux strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

8.1.8 Rappels de dérivation

Définition 8: Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

On dit que $f'(a)$ est le nombre dérivé de la fonction f au point a.

• On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point de I.

On note alors $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ la fonction dérivée de f.

Remarque 7. • En physique, on note également $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ au lieu de $f'(a)$.

• On a la définition équivalente suivante : f est dérivable en a si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite.

L'équivalence des deux définitions est immédiate en posante $h = x - a$.

Proposition 5: Tangente

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On suppose que la fonction f est dérivable en a, i.e. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.
Alors la courbe représentative de f admet une tangente au point $(a, f(a))$ dont l'équation est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple 11. Soit $f : x \longrightarrow e^x$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $(0, f(0)) = (0, 1)$ est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = f(0)x + 1 = x + 1.$$

Proposition 6: Lien entre signe de la dérivée et monotonie

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.

1. La fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
2. La fonction f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
3. La fonction f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
4. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
5. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Remarque 8. Pour les deux derniers alinéas, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de l'application $f : x \longmapsto x^3$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais on a $f'(0) = 0$.

Proposition 7: Opérations sur les dérivées

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en a.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
2. La fonction fg est dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. Supposons que $g(a) \neq 0$.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$
En particulier la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Proposition 8: Dérivation d'une fonction composée

Soit $f : I \longrightarrow J$, soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en a et
$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Proposition 9: Dérivation d'une fonction réciproque

Soient I et J des intervalles réels. Soit $f : I \longrightarrow J$ une application continue sur I, strictement monotone et bijective de bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$.
Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ainsi, si f est dérivable sur I alors pour tout $x \in J$, f^{-1} est dérivable en x si et seulement si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ et dans ce cas, on a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque 9. Dans le cas où $f'(a) = 0$, la courbe représentative de f^{-1} admet une tangente verticale en $f(a)$.

Définition 9: Dérivée n-ème

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On appelle dérivée n-ème de f en a le nombre :
• $f^{(0)}(a) = f(a)$ et $f^{(0)} = f$ si $n = 0$;
• $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ si $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable en a si $n \geqslant 1$. On dit alors que f est n fois dérivable en a.
On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I et on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f sur I.

Remarque 10. On a $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$...

Définition 10: Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I se note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Remarque 11. • $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
• $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont les dérivées sont continues sur I.
• Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

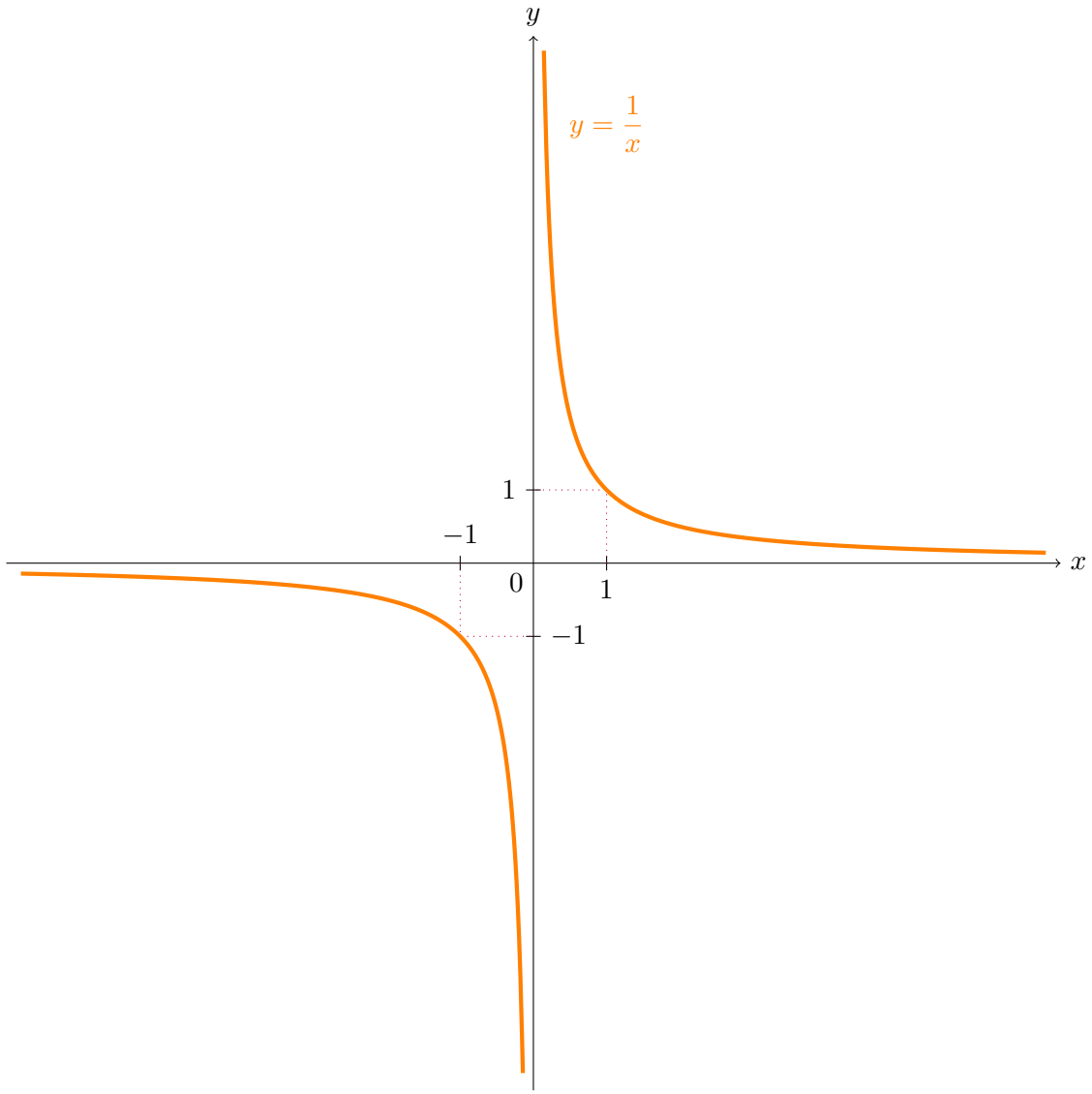
8.1.9 Asymptotes

Définition 11: Asymptotes horizontales et verticales

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $\mathcal{D}_f$ est de la forme $[a, +\infty[$ (ou $]-\infty, a]$) pour $a \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = m$, où $m \in \mathbb{R}$, en $+\infty$ (ou en $-\infty$) si
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = m \quad (\text{ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = m).$$
2. Si $\mathcal{D}_f$ est de la forme $]a, b]$ (ou $[b, a[$), on dit que f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad (\text{ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty).$$

Exemple 12. La fonction
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.



8.2 Fonctions usuelles

8.2.1 Fonctions affines

Définition 12: Fonctions affines

On appelle fonction affine toute fonction de la forme

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax + b \end{array}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Si $b = 0$, on dit que f est linéaire.
La courbe représentative de f est une droite de pente a et d'ordonnée à l'origine égale à b (elle passe donc par l'origine si $b = 0$).

Remarque 12. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$, on a $a = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Proposition 10: Monotonie des fonctions affines

Soit f une fonction affine de pente a.

1. Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Si $a = 0$, alors f est constante égale à b sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Ceci découle de la formule énoncée dans la remarque.
En effet, si $x < y$, alors $f(y) - f(x) = a(y - x)$ est du signe de a et le résultat en découle. ■

Proposition 11: Limites des fonctions affines

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction affine

$$\begin{array}{rccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b. \end{array}$$

1. Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
3. Si $a = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

8.2.2 Fonctions puissances d'exposant entier

On étudie dans cette section les fonctions de la forme $f : x \longmapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \geqslant 0$, une telle fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et si $n < 0$, elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a vu ci-dessus que si n est pair, cette fonction est paire, et si n est impair, cette fonction est impaire.

Proposition 12: Dérivée des fonctions puissances

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On pose $\begin{array}{rccc} f_n : \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ où $\mathcal{D}_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geqslant 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0. \end{cases}$
Alors f_n est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Remarque 13. Si $n = 0$, f_0 est la fonction constante égale à 1 et on retrouve que sa dérivée est la fonction constante égale à 0.

Démonstration. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

• Si $n = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x$ et $f_1'(x) = 1 = nx^{n-1}$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Montrons que f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}'(x) = (n+1)x^n$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \times x^n = x \times f_n(x)$. Ainsi, f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}'(x) = f_n(x) + xf_n'(x) = x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n,$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On a prouvé la formule pour tout $n > 0$. Il reste à prouver la formule pour $n < 0$.

Soit $n < 0$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) = x^n = \dfrac{1}{x^{-n}} = \dfrac{1}{f_{-n}(x)}$ avec $-n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque f_n est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_n'(x) = \frac{-f_{-n}'(x)}{f_{-n}(x)^2} = -\frac{-nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$$

donc la formule est vraie également pour $n < 0$. ■

• Soit $n > 0$.

Si n est pair (donc $n-1$ impair), on trouve le tableau de variation suivant pour f_n :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(pour $n = 2$, on reconnaît les variations de la fonction $x \longmapsto x^2$).

Si n est impair (donc $n-1$ pair), on trouve le tableau de variation suivant pour f_n :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $f_n(0) = 0$ (pour $n = 3$, on reconnaît les variations de la fonction $x \longmapsto x^3$).

• Soit $n < 0$.

Si n est pair (donc $n-1$ impair), on trouve le tableau de variation suivant pour f_n :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$ $\searrow$	0

(pour $n = -2$, on reconnaît les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$).

Si n est impair (donc $(n-1)$ pair), on trouve le tableau de variation suivant pour f_n :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$		$-$	
f_n	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	0

Pour $n = -1$, on reconnaît les variations de la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

8.2.3 Racine carrée

On a déjà vu dans le chapitre « Nombres réels »les propriétés élémentaires de la fonction racine carrée

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

On a notamment vu que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Ainsi, elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Proposition 13: Dérivée de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+$.
Alors pour tout $x \neq a$, on a

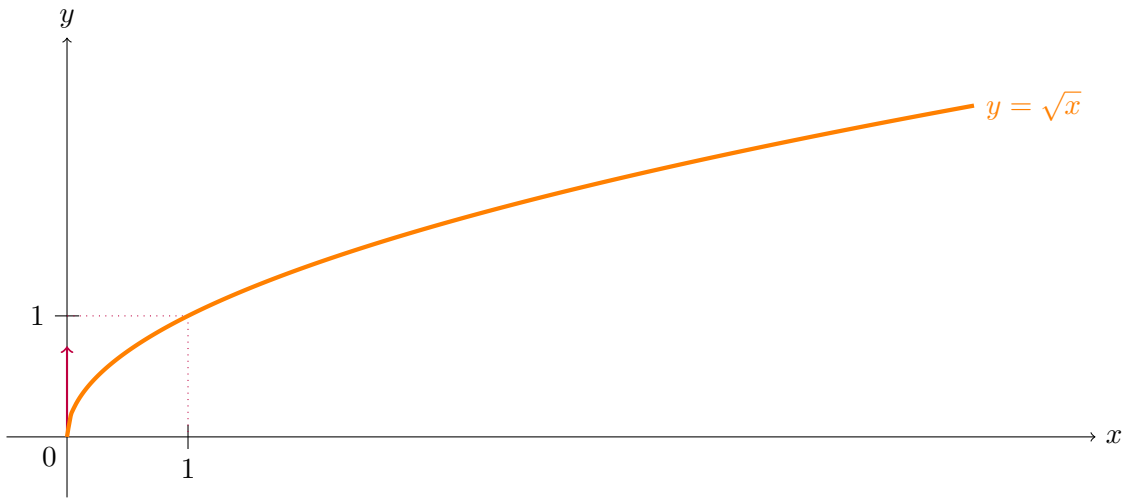
$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

On cherche la limite de ce taux de variation quand x tend vers a. On remarque que si $a = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet une tangente verticale en l'origine.

Si $a \neq 0$, on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ donc la fonction racine carrée est dérivable en a et vérifie $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. ■

Remarque 14. On remarque que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, ce qui confirme que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée est la suivante :



8.2.4 Logarithme néperien

Définition 13: Logarithme néperien

On appelle logarithme néperien, et on note ln, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\ln(1) = 0$.
2. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarque 15. • L'existence de la fonction logarithme est une conséquence du théorème fondamental de l'analyse qui sera vu ultérieurement. On notera à ce moment-là :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

• Outre $\ln(1) = 0$, il est bon de connaître un ordre de grandeur pour $\ln(2)$:

$$\ln(2) \simeq 0,69...$$

Proposition 14: Monotonie et signe du logarithme néperien

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
En particulier, pour tout $x \in]0,1[, \ln(x) < 0$ et pour tout $x > 1, \ln(x) > 0$.

Démonstration. Pour tout $x > 0, \ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque par définition, $\ln(1) = 0$, ceci implique que pour tout $x \in]0,1[, \ln(x) < 0$ et pour tout $x > 1, \ln(x) > 0$. ■

Proposition 15: Dérivation de $\ln(u)$

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application dérivable sur I.
Alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Démonstration. La fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in I$,

$$(\ln \circ u)'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

■

Exemple 13. Soit $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\sqrt{x}). \end{array}$ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

Proposition 16: Propriétés du logarithme néperien

1. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
3. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^n) = n\ln(x)$.
5. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\ln(x)$.

Démonstration.

1. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y). \end{array}$$

Par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ égale à $f(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$.
Ainsi, pour tout $x > 0, f(x) = 0$ donc pour tout $x > 0, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
Ceci étant vrai pour tout $y > 0$, on a bien pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

2. D'après l'alinéa précédent, pour tout $x > 0$, on a

$$0 = \ln(1) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.

3. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. D'après les deux alinéas précédents, on a

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n\ln(x)$.
• Pour $n = 0$, on a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Montrons que $\ln(x^{n+1}) = (n+1)\ln(x)$.
En utilisant la propriété montrée dans le premier alinéa et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x),$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Il reste à montrer la propriété pour les entiers strictement négatifs.
Soit $n < 0$. Alors $-n > 0$ et d'après le deuxième alinéa et la propriété que l'on vient de montrer pour les entiers positifs, on a

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}) = -(-n\ln(x)) = n\ln(x).$$

On a donc bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n\ln(x)$.

5. Soient $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   D'après la propriété précédente, on a
   $$q \ln(x^{\frac{p}{q}}) = \ln(x^{q\frac{p}{q}}) = \ln(x^p) = p\ln(x)$$
   donc $\ln(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\ln(x)$.

■

Exemple 14. • $\ln(8) = 3\ln(2)$.
• $\ln(\frac{3}{25}) = \ln(3) - \ln(25) = \ln(3) - 2\ln(5)$.
• Pour tout $x > 0, \ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

Proposition 17: Limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$.
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration.

1. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'il existe $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = l$.
   Supposons par l'absurde que $l \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = l$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = 2l$.
   Par unicité de la limite, on en déduit que $2l = l$, d'où $l = 0$. Mais ceci est absurde puisque, pour tout $x \geqslant 2, \ln(x) \geqslant \ln(2) > 0$.
   On en déduit que $l = +\infty$, i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

2. Soit $x > 0$. Posons $X = \dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers $0^+, X$ tend vers $+\infty$ donc
   $$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty.$$

3. Etudions la fonction $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - 2\sqrt{x}. \end{array}$ La fonction f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}.$$

On obtient le tableau de variation suivant pour f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	-2	↘	

Ainsi, pour tout $x > 0, f(x) < 0$ donc $\ln(x) < 2\sqrt{x}$.
On en déduit que pour tout $x > 1, 0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0^+$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+.$$

4. Soit $x > 0$. Posons $X = \dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers $0^+, X$ tend vers $+\infty$ donc

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(\frac{1}{X})}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0^-.$$

5. Soit $x > 0$. Posons $X = 1 + x$. Quand x tend vers $0^+, X$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{X\to1} \frac{\ln(X) - \ln(1)}{X-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

■

Remarque 16. • On a montré que pour tout $x > 0, \ln(x) < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln(x) < \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$.
En appliquant ceci à x^2, on obtient que pour tout $x > 0, \ln(\sqrt{x^2}) < \sqrt{x^2}$ d'où

$$\forall x > 0, \ln(x) < x.$$

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Proposition 18

Pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration. Posons pour tout $x > -1, f(x) = x - \ln(1+x)$.
La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

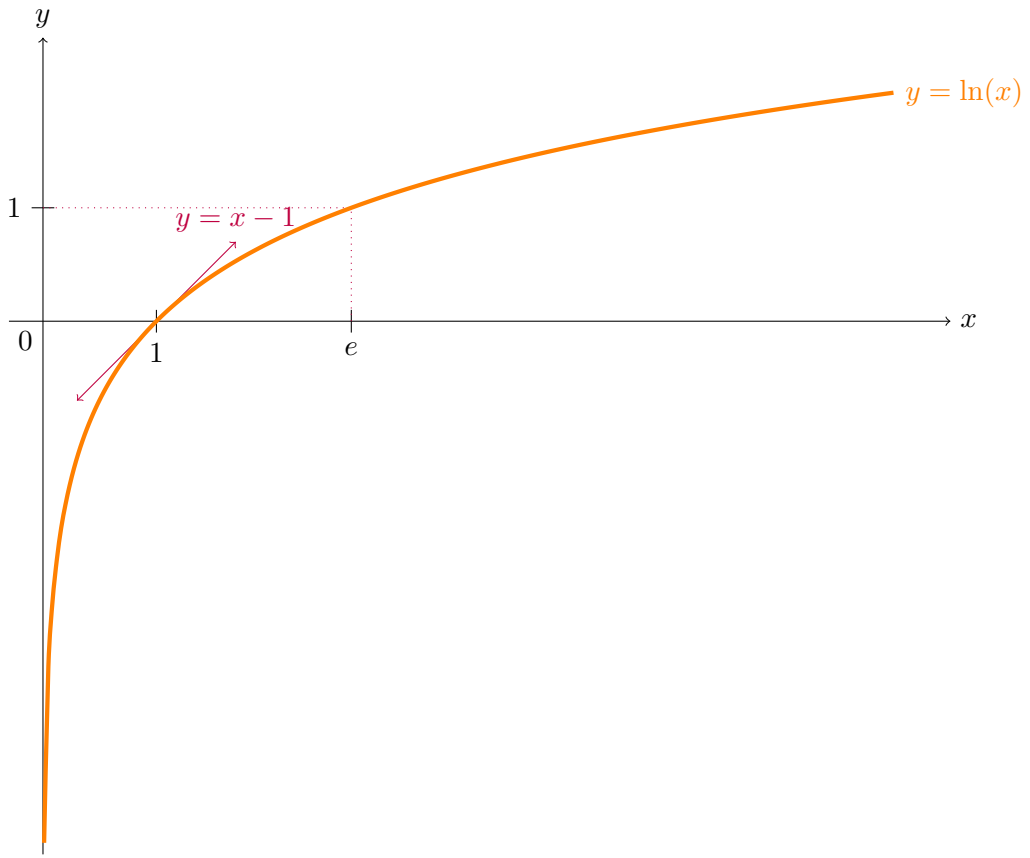
Ainsi, pour tout $x \in]-1, 0], f'(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \in [0, +\infty[, f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que la fonction f admet un minimum en 0 donc pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$ ce qui implique que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$. ■

Puisque la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a vu qu'elle y est strictement croissante, que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Ainsi, ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative est la suivante :



L'équation de la tangente à la courbe au point $(1,0)$ est

$$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1.$$

Puisque ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique réel dont l'image par ln est 1. On note ce nombre réel e et on a $e \simeq 2,718281828...$

8.2.5 Fonction exponentielle

Définition 14: Fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle, et on note exp, la bijection réciproque du logarithme néperien définie sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \exp(x). \end{array}$$

On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \exp(\ln(x)) = x.$$

Remarque 17. • Par définition, pour tout réel $x, \exp(x)$ est l'unique réel strictement positif tel que $\ln(\exp(x)) = x$.

- On note en particulier que pour tout réel $x, \exp(x) > 0$.
- Par définition, la fonction exponentielle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Puisque $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$, on a $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.

Proposition 19: Dérivée et monotonie de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

En particulier, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque 18. La stricte croissance est en fait une conséquence du fait que la fonction exponentielle est la bijection réciproque du logarithme néperien, qui est elle-même une fonction strictement croissante.

Démonstration. Notons $f = \ln$ et $f^{-1} = \exp$.

On a pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*, f'(a) = \dfrac{1}{a} \neq 0$. Ainsi, d'après la formule donnant la dérivée d'une bijection réciproque, on en déduit que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*, f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}, f^{-1} = \exp$ est dérivable en x et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

■

Remarque 19. On retrouve la caractérisation bien connue de la fonction exponentielle : c'est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\begin{cases} \exp(0) &= 1 \\ \exp' &= \exp \end{cases}$$

C'est une propriété remarquable de la fonction exponentielle : c'est une fonction égale à sa dérivée.

Corollaire 1: Dérivation de $\exp \circ u$

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.
Alors $\exp \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\exp \circ u)'(x) = u'(x) \exp(u(x)).$$

Démonstration. La fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$(\exp \circ u)'(x) = u'(x) \exp'(u(x)) = u'(x) \exp(u(x)).$$

■

Exemple 15. Soit $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x^2). \end{array}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x \exp(x^2).$$

Proposition 20: Propriétés de la fonction exponentielle

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}, \exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.
3. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
4. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, pour tout $x\in\mathbb{R}, (\exp(x))^n=\exp(nx)$.
5. Pour tout $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$(\exp(x))^{\frac{p}{q}}=\exp\left(\frac{p}{q}x\right).$$

Démonstration. On utilise les propriétés du logarithme néperien.

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a
$$\ln(\exp(x)\exp(y))=\ln(\exp(x))+\ln(\exp(y))=x+y=\ln(\exp(x+y)),$$
ce qui implique par injectivité du logarithme néperien que $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\ln\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)=-\ln(\exp(x))=-x=\ln(\exp(-x)),$$
ce qui implique par injectivité du logarithme néperien que $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.
3. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a
$$\ln\left(\frac{\exp(x)}{\exp(y)}\right)=\ln(\exp(x))-\ln(\exp(y))=x-y=\ln(\exp(x-y)),$$
ce qui implique par injectivité du logarithme néperien que $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
4. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\ln((\exp(x))^n)=n\ln(\exp(x))=nx=\ln(\exp(nx)),$$
ce qui implique par injectivité du logarithme néperien que $(\exp(x))^n=\exp(nx)$.
5. Pour tout $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\ln((\exp(x))^{\frac{p}{q}})=\frac{p}{q}\ln(\exp(x))=\frac{p}{q}x=\ln\left(\exp\left(\frac{p}{q}x\right)\right),$$
ce qui implique par injectivité du logarithme néperien que $(\exp(x))^{\frac{p}{q}}=\exp\left(\frac{p}{q}x\right)$.

■

Remarque 20. On remarque que la fonction exponentielle vérifie les mêmes propriétés que les puissances.

Dorénavant, on notera donc pour tout réel $x, e^x=\exp(x)$.

En effet, cette notation est légitime car $e^1=\exp(1)=e$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$e^{x+y}=\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)=e^xe^y \quad\text{et}\quad e^{-x}=\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}=\frac{1}{e^x}.$$

Exemple 16. • $e^6 = (e^2)^3 = (e^3)^2$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$.

Proposition 21: Limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$.
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

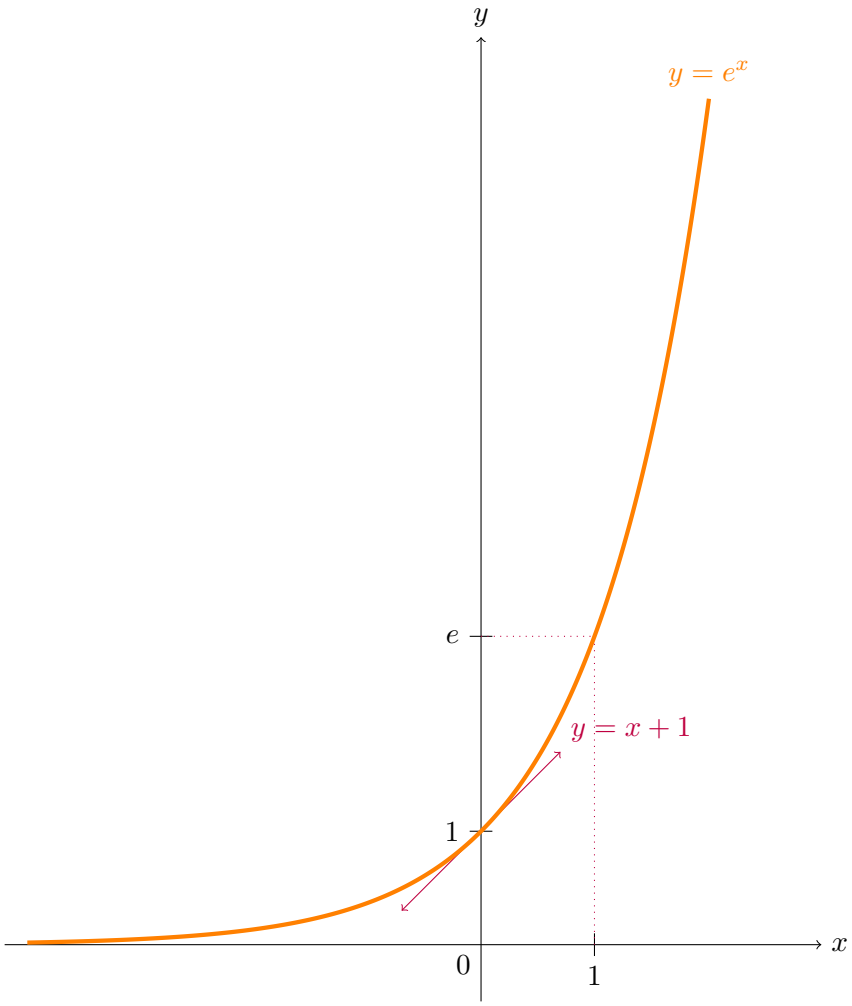
Démonstration.

1. On a montré que pour tout $x > 0, \ln(x) < x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) < e^x$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, x < e^x$.
   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par comparaison, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
2. Soit $x < 0$. Posons $X = -x$. Quand x tend vers $-\infty, X$ tend vers $+\infty$ et on a
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0^+,$$
   car $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = e^x$, d'où $x = \ln(X)$. Quand x tend vers $+\infty, X$ tend vers $+\infty$ et on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln(X)} = +\infty$$
   car $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0^+$.
4. Soit $x < 0$. Posons $X = -x$. Quand x tend vers $-\infty, X$ tend vers $+\infty$ et on a
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0^-$$
   car $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.
5. On a
$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x-0} = \exp'(0) = e^0 = 1.$$

■

Remarque 21. La dernière propriété s'écrit également $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle est la suivante :



C'est la courbe symétrique de la courbe représentative du logarithme néperien par rapport à la première bissectrice.

L'équation de la tangente à la courbe au point $(0, 1)$ est

$$y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1.$$

Proposition 22

Pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geqslant 1 + x$.

Démonstration. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - (1 + x)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$.

Ainsi, pour tout $x \leqslant 0, f'(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0, f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que f admet un minimum en 0 donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(0) = 0$, ce qui implique que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$. ■

Enfin, la fonction exponentielle permet de répondre à une question soulevée dans le chapitre « Nombres réels », à savoir quel sens donner à a^b pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Définition 15: Notation a^b

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note

$$a^b = e^{b \ln(a)}.$$

Remarque 22. Ceci est cohérent avec les propriétés déjà vues pour les puissances rationnelles : en effet, soient $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors

$$e^{\frac{p}{q}\ln(a)} = e^{\ln(a^{\frac{p}{q}})} = a^{\frac{p}{q}}.$$

La généralisation des puissances rationnelles aux puissances réelles devient alors naturelle.

Rappelons que si $x \in \mathbb{R}^*$, on peut même définir sans aucun mal x^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Grâce aux propriétés de la fonction exponentielle, on retrouve ainsi les propriétés des puissances entières et rationnelles étendues aux puissances réelles :

Proposition 23

Soient $(a,a') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soient $(b,b') \in \mathbb{R}^2$. On a les propriétés suivantes :

$$1)(aa')^b = a^b a'^b; \quad 2)a^b a^{b'} = a^{b+b'}; \quad 3)(a^b)^{b'} = a^{bb'};$$
$$4)\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}; \quad 5)\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}.$$

Démonstration.

1. $$(aa')^b = e^{b\ln(aa')} = e^{b(\ln(a)+\ln(a'))} = e^{b\ln(a)+b\ln(a')} = e^{b\ln(a)}e^{b\ln(a')} = a^b a'^b.$$

2. $$a^b a^{b'} = e^{b\ln(a)}e^{b'\ln(a)} = e^{(b+b')\ln(a)} = a^{b+b'}.$$

3. $$(a^b)^{b'} = e^{b'\ln(a^b)} = e^{b'\ln(e^{b\ln(a)})} = e^{b'b\ln(a)} = a^{bb'}.$$

4. $$\left(\frac{a}{a'}\right)^b = e^{b\ln(\frac{a}{a'})} = e^{b(\ln(a)-\ln(a'))} = e^{b\ln(a)-b\ln(a')} = \frac{e^{b\ln(a)}}{e^{b\ln(a')}} = \frac{a^b}{a'^b}.$$

5. $$\frac{a^b}{a^{b'}} = \frac{e^{b\ln(a)}}{e^{b'\ln(a)}} = e^{(b-b')\ln(a)} = a^{b-b'}.$$

■

Remarque 23. On en déduit que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \ln(a^b) = b\ln(a)$ puisque

$$\ln(a^b) = \ln(e^{b\ln(a)}) = b\ln(a).$$

De même, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(e^a)^b = e^{b\ln(e^a)} = e^{ab}$.

8.2.6 Fonctions exponentielles de base a

Définition 16: Fonction exponentielle de base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & a^x \end{array}.$$

Remarque 24. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_a(x) = e^{x\ln(a)} > 0$.

On a en outre $f_a(1) = a$.

Exemple 17.
1. Pour $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle étudiée dans la section précédente.
2. Pour $a = 1$, la fonction f_a est constante égale à 1.

Proposition 24: Dérivée et monotonie des fonctions exponentielles de base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction exponentielle de base a, notée f_a, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a'(x) = \ln(a)a^x.$$

En particulier, si $0 < a < 1$, la fonction f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et si $a > 1$, la fonction f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $a > 0$. La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a'(x) = \ln(a)\exp'(x\ln(a)) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x\ln(a)} > 0$ donc $f_a'(x)$ est du signe de $\ln(a)$.

Ainsi, si $0 < a < 1, \ln(a) < 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f_a'(x) < 0$ ce qui implique que la fonction f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 1$, on retrouve que pour tout $x \in \mathbb{R}, f_a'(x) = 0$ donc la fonction f_a est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $f_a(0) = a^0 = 1$.

Si $a > 1, \ln(a) > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f_a'(x) > 0$ ce qui implique que la fonction f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

Proposition 25: Limites des fonctions exponentielles de base a

Soit $a > 0$.
1. Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
2. Si $0 < a < 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

Démonstration.

1. Supposons que $a > 1$. Dans ce cas, $\ln(a) > 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(a)x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(a)x = +\infty$ donc en composant par l'exponentielle, on obtient que

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty.$$

2. Supposons que $0 < a < 1$. Dans ce cas, $\ln(a) < 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(a)x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(a)x = -\infty$ donc en composant par l'exponentielle, on obtient que

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = 0.$$

■

8.2.7 Fonction logarithme décimal

Définition 17: Fonction logarithme décimal (log)

On appelle fonction logarithme décimal, et on note log, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Remarque 25. Cette fonction a un intérêt tout particulier en physique-chimie. Elle est particulièrement pratique pour manipuler des puissances de 10.

Exemple 18. Pour tout $n \in \mathbb{Z}, \log(10^n) = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \dfrac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n.$

En particulier, $\log(\frac{1}{10}) = -1, \log(1) = 0, \log(10) = 1, \log(100) = 2, \log(1000) = 3...$

Proposition 26: Dérivée et monotonie du logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x > 0, \log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}.$$

La fonction log est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Puisque le logarithme néperien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, le logarithme décimal l'est également et par linéarité de la dérivée, on a pour tout $x > 0$:

$$\log'(x) = \frac{1}{\ln(10)}\ln'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0, \log'(x) > 0$ donc la fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Proposition 27: Limites du logarithme décimal

On a

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty.$$

Démonstration. Puisque $\ln(10) > 0$, les limites du logarithme décimal sont les mêmes que celles du logarithme néperien. ■

Remarque 26. Des deux propriétés précédentes, on déduit que le logarithme néperien réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $f_{10} : x \longmapsto 10^x$.

En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a

$$\log(x) = y \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = y \Leftrightarrow \ln(x) = y\ln(10) \Leftrightarrow x = e^{y\ln(10)} = 10^y.$$

Proposition 28: Propriétés du logarithme décimal

Le logarithme décimal vérifie les mêmes propriétés que le logarithme néperien, à savoir :

1. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \log(xy) = \log(x) + \log(y)$.
2. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$ et $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$.
3. Pour tout $x > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \log(x^\alpha) = \alpha\log(x)$.

Démonstration.

1. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a

$$\log(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} + \frac{\ln(y)}{\ln(10)} = \log(x) + \log(y).$$

2. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln(\frac{x}{y})}{\ln(10)} = \frac{\ln(x) - \ln(y)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} - \frac{\ln(y)}{\ln(10)} = \log(x) - \log(y).$$

   On en déduit que $\log(\frac{1}{x}) = \log(1) - \log(x) = -\log(x)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\log(x^\alpha) = \frac{\ln(x^\alpha)}{\ln(10)} = \frac{\alpha \ln(x)}{\ln(10)} = \alpha \log(x).$$

■

8.2.8 Fonctions puissances

On s'intéresse dans cette section aux fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$$

où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En effet, on a déjà étudié le cas des fonctions puissances d'exposant entier (i.e. $\alpha \in \mathbb{Z}$).

Remarque 27. Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on retrouve la racine carrée qui est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Plus généralement, si $\alpha = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on retrouve les racines n-èmes vues dans le chapitre « Nombres réels ».

Proposition 29: Dérivation des fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x > 0, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ainsi, si $\alpha > 0$, la fonction f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $\alpha < 0$, la fonction f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Pour tout $x > 0$, on a $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$. Ainsi la fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:

$$f'_\alpha(x) = \alpha \ln'(x) \exp'(\alpha \ln(x)) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0, f'_\alpha(x)$ est du signe de α et on en déduit la monotonie de f_α. ■

Remarque 28. Cette formule généralise donc celle obtenue pour les fonctions puissances d'exposant entier.

Proposition 30: Limites des fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Si $\alpha > 0$, alors
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty.$$
2. Si $\alpha < 0$, alors
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0.$$

Démonstration.

1. Supposons que $\alpha > 0$. On a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\ln(x) = +\infty$ donc en composant par l'exponentielle, on obtient
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \lim_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha\ln(x)} = +\infty.$$
2. Supposons que $\alpha < 0$. On a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\ln(x) = -\infty$ donc en composant par l'exponentielle, on obtient
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \lim_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln(x)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha\ln(x)} = 0.$$

■

Remarque 29. On en déduit que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la bijection réciproque est $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.

En effet, on a pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x^\alpha = y \Leftrightarrow (x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = y^{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{\alpha}}$.

8.2.9 Croissances comparées

Théorème 1: Théorème de croissances comparées

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\beta > 0$, on a

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{\ln^\alpha(x)} = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0^+$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0^+$.

Démonstration.

1. • Si $\alpha = 0$, le résultat est évident car $\lim\limits_{x\to+\infty} \beta x = +\infty$ (car $\beta > 0$) et on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\beta x} = +\infty$.

   • Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0^+$ et on obtient par quotient de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$.

   • Supposons dorénavant que $\alpha > 0$.

   On a pour tout $x > 0$, $\dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \times \left(\dfrac{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}{\frac{\beta}{\alpha}x}\right)^\alpha$.

Puisque $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta}{\alpha}x = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc par composition de limites, il en découle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}{\frac{\beta}{\alpha}x} = +\infty$ et puisque $\alpha > 0$, il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}{\frac{\beta}{\alpha}x}\right)^\alpha = +\infty$.

Enfin, puisque $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha > 0$, on en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \times \left(\dfrac{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}{\frac{\beta}{\alpha}x}\right)^\alpha = +\infty$.

2. Pour tout $x > 1$, on a $\dfrac{x^\beta}{\ln^\alpha(x)} = \dfrac{(e^{\ln(x)})^\beta}{\ln^\alpha(x)} = \dfrac{e^{\beta\ln(x)}}{\ln^\alpha(x)}$.

   Or, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$ donc on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta\ln(x)}}{\ln^\alpha(x)} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{\ln^\alpha(x)} = +\infty$.

3. Posons $X = \dfrac{1}{x}$. On a pour tout $x > 0, x^\beta |\ln(x)|^\alpha = \dfrac{1}{X^\beta} |\ln\left(\frac{1}{X}\right)|^\alpha = \dfrac{|\ln(X)|^\alpha}{X^\beta}$.

   Or, quand $x \to 0^+, X \to +\infty$ et d'après le point précédent, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{|\ln(X)|^\alpha}{X^\beta} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0^+$.

4. Posons $X = -x$. Pour tout $x < 0, |x|^\alpha e^{\beta x} = |-X|^\alpha e^{-\beta X} = \dfrac{|X|^\alpha}{e^{\beta X}}$.

   Or, quand $x \to -\infty, X \to +\infty$ et d'après le point 1., $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{|X|^\alpha}{e^{\beta X}} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0^+$.

■

8.2.10 Fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsin

On sait que sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective de bijection réciproque arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Puisque sin est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, d'après le théorème de la bijection, il s'ensuit que arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

De plus, on a la propriété suivante :

Proposition 31: Imparité de arcsin

La fonction arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est impaire.

Démonstration. Par imparité de la fonction sinus, on a pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(-\arcsin(x)) = -\sin(\arcsin(x)) = -x = \sin(\arcsin(-x))$$

donc par injectivité de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que pour tout $x \in [-1, 1], \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ donc la fonction arcsin est impaire.

■

Proposition 32: Dérivée de la fonction arcsin

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La fonction sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et on a pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin'(x) = \cos(x)$.

Ainsi, $\sin'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, on en déduit que arcsin est dérivable en $x \in [-1,1]$ si et seulement si $\arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est à dire si et seulement si $x \in]-1,1[$.

Ainsi, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[, \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$.

Pour tout $x \in]-1,1[, \arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\arcsin(x)) > 0$, d'où

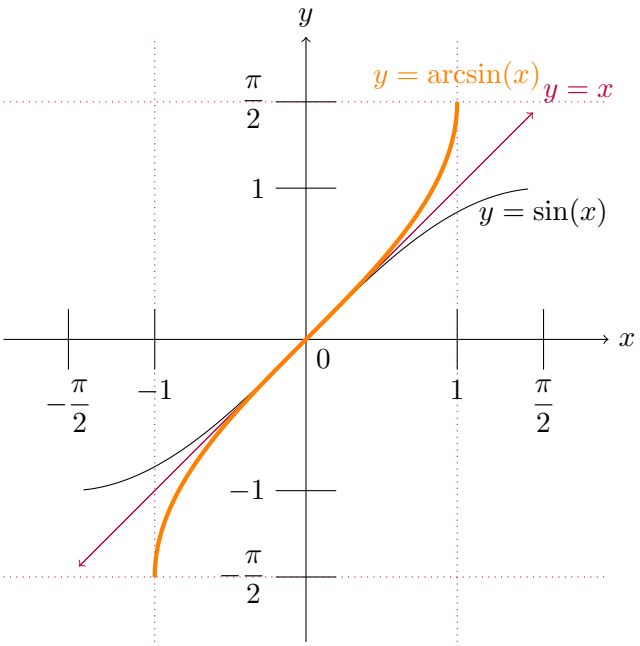
$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement,

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

Remarque 30. Il est important de noter que arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1. La courbe représentative de arcsin admet en ces points des tangentes verticales.



Fonction arccos

On sait que $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ est bijective de bijection réciproque $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$.

Puisque cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, d'après le théorème de la bijection, il s'ensuit que arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Proposition 33: Dérivée de la fonction arccos

La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$ et on a pour tout $x \in [0,\pi], \cos'(x) = -\sin(x)$.

Ainsi, $\cos'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in]0,\pi[$.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, on en déduit que arccos est dérivable en $x \in [-1,1]$ si et seulement si $\arccos(x) \in]0,\pi[$, c'est à dire si et seulement si $x \in]-1,1[$.

Ainsi, arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[, \sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$.

Pour tout $x \in]-1,1[, \arccos(x) \in]0,\pi[$ donc $\sin(\arccos(x)) > 0$ d'où

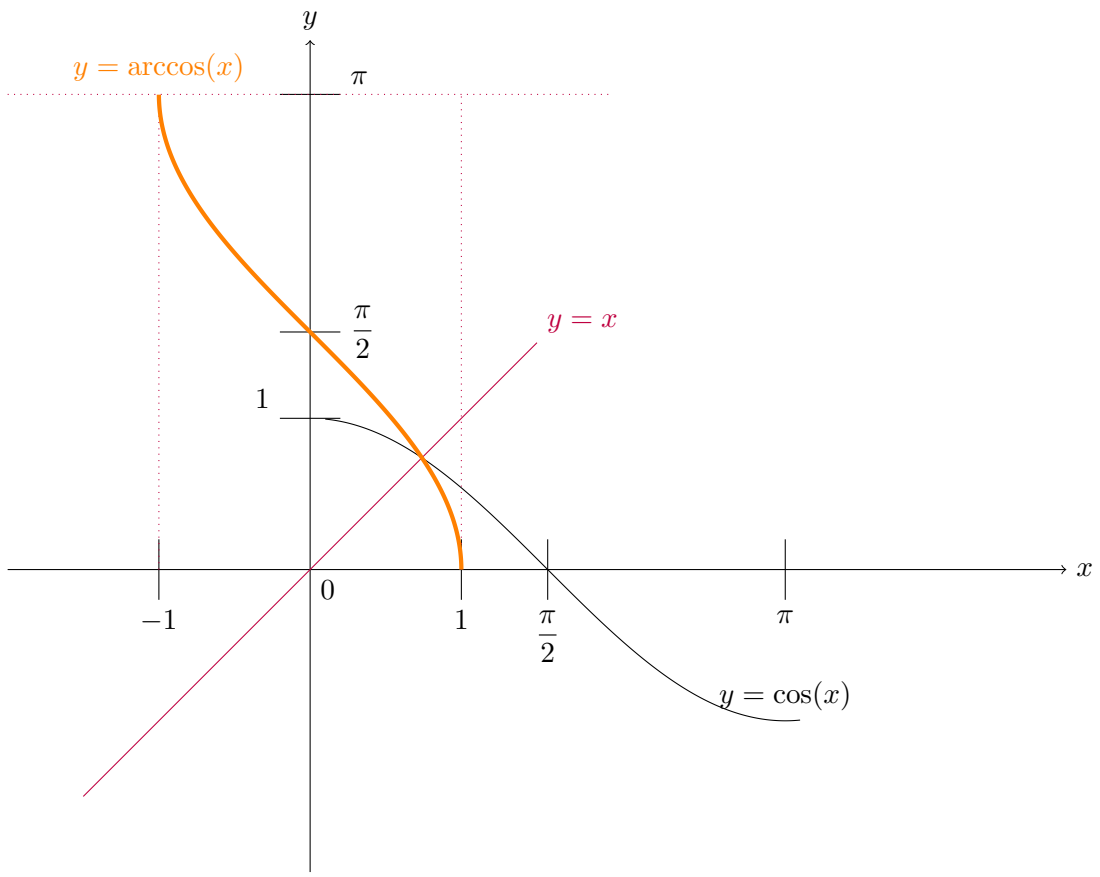
$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

Remarque 31. Il est important de noter que arccos n'est pas dérivable en -1 et en 1. La courbe représentative de arccos admet en ces points des tangentes verticales.



Fonction arctan

On sait que tan : $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective de bijection réciproque arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Puisque tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, d'après le théorème de la bijection, il s'ensuit que arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a les propriétés suivantes :

Proposition 34: Propriétés de arctan

1. La fonction arctan est impaire.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Démonstration.

1. L'imparité de arctan découle de l'imparité de tan. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\tan(-\arctan(x)) = -\tan(\arctan(x)) = -x = \tan(\arctan(-x)),$$

d'où par injectivité de tan sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, ce qui prouve l'imparité de arctan.

2. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $\varepsilon < \pi$, car si $\varepsilon \geqslant \pi$, pour tout $x \in \mathbb{R}, \arctan(x) \geqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$. Posons $A = \max(0, \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon))$. Par stricte croissance de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \geqslant A, \arctan(A) \leqslant \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$ d'où $\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$, ce qui implique que $|\arctan(x) - \frac{\pi}{2}| \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Enfin, par imparité de arctan,

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(-x) = -\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

■

Remarque 32. En particulier, on a $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Proposition 35: Dérivée de la fonction arctan

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

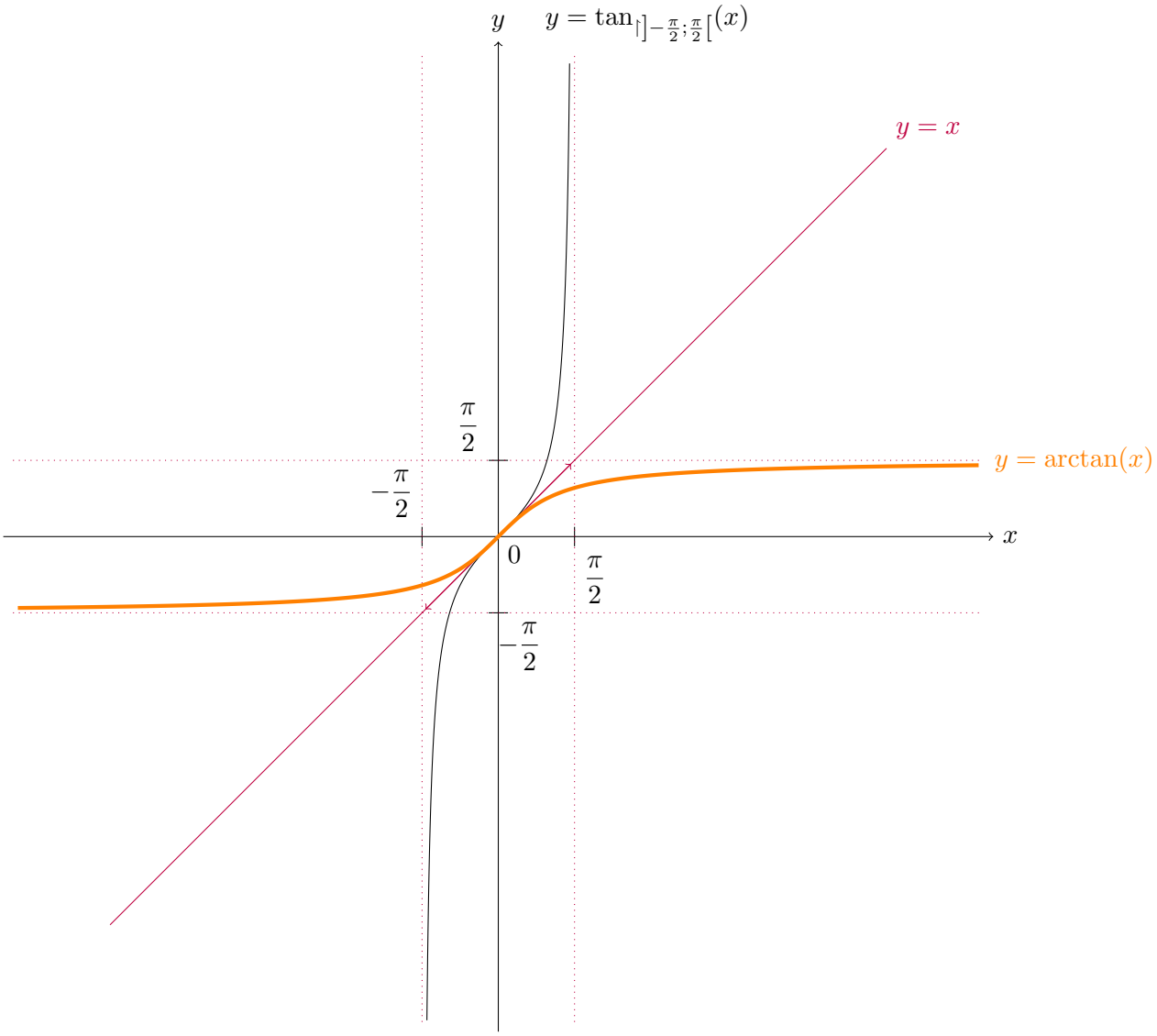
$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$ donc d'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. ■

Le graphe de arctan sur $\mathbb{R}$ s'obtient à partir de celui de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$:



8.2.11 Fonctions hyperboliques

Définition 18: Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Les fonctions $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont appelées respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

Remarque 33. La fonction cosinus hyperbolique est la partie paire de la fonction exponentielle réelle, tandis que la fonction sinus hyperbolique en est la partie impaire. A fortiori, ch est paire et sh est impaire.

Proposition 36: Relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

■

Proposition 37: Dérivation de ch et sh

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Démonstration. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

■

Corollaire 2: Variations et limites de ch et sh

1. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.
3. La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

Démonstration.

1. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ donc $\mathrm{sh}'(x) > 0$, ce qui prouve que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$.

   De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$.

   On a donc le tableau de variation suivant pour la fonction sh :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$		$+$	
sh	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$. D'après la question précédente, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\text{sh}(0) = \dfrac{e^0 - e^0}{2} = 0$ donc pour tout $x < 0, \text{sh}(x) < 0$ et pour tout $x > 0, \text{sh}(x) > 0$.

   Ainsi, pour tout $x < 0, \text{ch}'(x) < 0$ et pour tout $x > 0, \text{ch}'(x) > 0$, ce qui prouve que ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. De la même manière que pour les limites de sh, on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{ch}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty$.

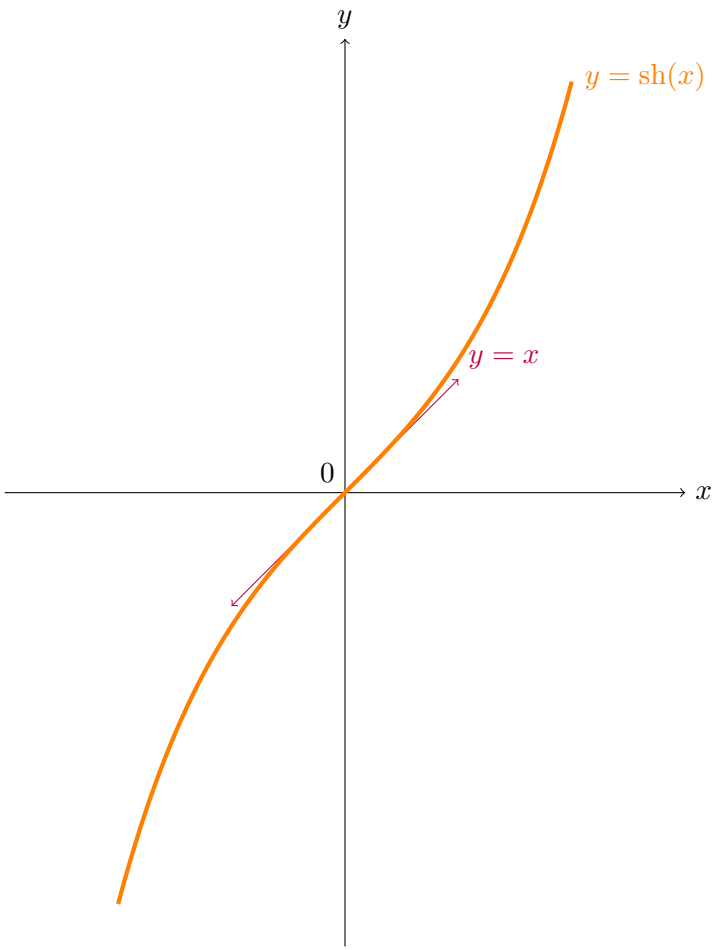
   Enfin $\text{ch}(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1$.

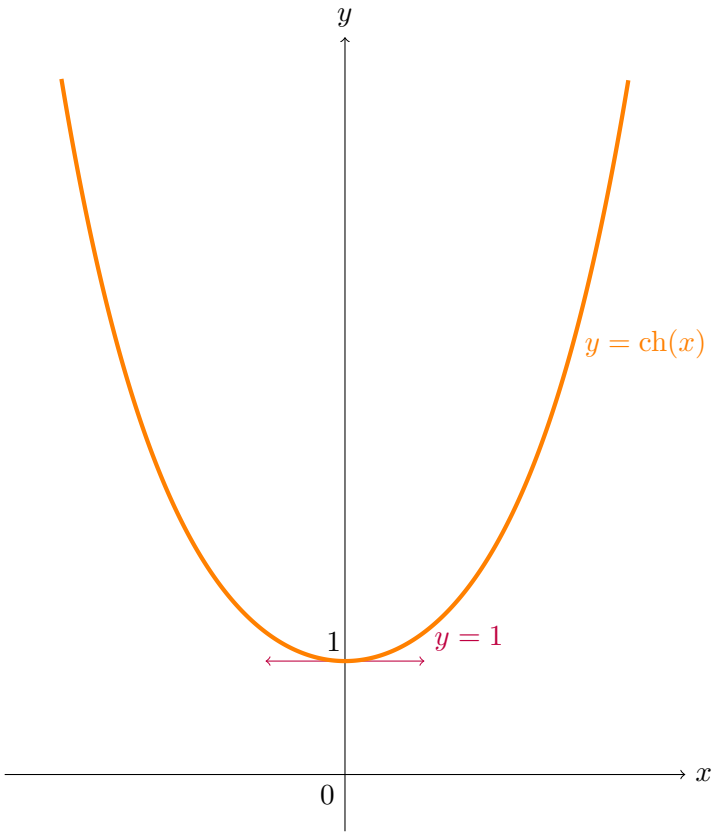
   On a donc le tableau de variation suivant pour la fonction ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

■

On obtient les courbes représentatives suivantes :





8.3 Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dans cette section, on s'intéresse à des fonctions définies sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes.

Définition 19: Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On définit les fonctions parties réelle et imaginaire de f par

$$\forall x \in I, \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

Ceci définit des fonctions $\mathrm{Re}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Remarque 34. Autrement dit, pour tout $x \in I, f(x) = \mathrm{Re}(f)(x) + i\mathrm{Im}(f)(x)$.

Exemple 19. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Re}(f)(\theta) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(f)(\theta) = \sin(\theta)$.

Définition 20: Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que f est dérivable sur I si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et dans ce cas, on pose

$$\forall x \in I, f'(x) = (\mathrm{Re}(f))'(x) + i(\mathrm{Im}(f))'(x).$$

Exemple 20. Puisque les fonctions cos et sin sont dérivables, la fonction f de l'exemple précédent est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$f'(\theta) = \cos'(\theta) + i\sin'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = i(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = ie^{i\theta}.$$

On retrouve les mêmes résultats que pour les fonctions à valeurs réelles :

Proposition 38: Opérations sur les dérivées

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $x \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x et
$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$
2. La fonction fg est dérivable en x et
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
3. Supposons que $g(x) \neq 0$.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$
En particulier la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x et
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Démonstration.

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ qu'on écrit sous forme algébrique $\lambda = a + ib$ et $\mu = a' + ib'$ où $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.
On a alors
$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x) &= [(a+ib)(\mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)) + (a'+ib')(\mathrm{Re}(g) + i\mathrm{Im}(g))](x)\\ &= [(a\mathrm{Re}(f) - b\mathrm{Im}(f) + a'\mathrm{Re}(g) - b'\mathrm{Im}(g)) + i(b\mathrm{Re}(f) + a\mathrm{Im}(f) + a'\mathrm{Im}(g) + b'\mathrm{Re}(g))](x)\end{aligned}$$
donc $\begin{cases}\mathrm{Re}(\lambda f + \mu g) &= a\mathrm{Re}(f) - b\mathrm{Im}(f) + a'\mathrm{Re}(g) - b'\mathrm{Im}(g)\\ \mathrm{Im}(\lambda f + \mu g) &= b\mathrm{Re}(f) + a\mathrm{Im}(f) + a'\mathrm{Im}(g) + b'\mathrm{Re}(g)\end{cases}$.
Puisque f et g sont dérivables, par définition, ceci implique que $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f), \mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont dérivables donc $\mathrm{Re}(\lambda f + \mu g)$ et $\mathrm{Im}(\lambda f + \mu g)$ sont dérivables en x comme combinaisons linéaires de fonctions dérivables à valeurs réelles et on a
$$\begin{cases}(\mathrm{Re}(\lambda f + \mu g))' &= a(\mathrm{Re}(f))' - b(\mathrm{Im}(f))' + a'(\mathrm{Re}(g))' - b'(\mathrm{Im}(g))'\\ (\mathrm{Im}(\lambda f + \mu g))' &= b(\mathrm{Re}(f))' + a(\mathrm{Im}(f))' + a'(\mathrm{Im}(g))' + b'(\mathrm{Re}(g))'\end{cases}$$
Par définition, ceci implique que $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x et on en déduit que
$$(\lambda f + \mu g)'(x) = (\mathrm{Re}(\lambda f + \mu g))'(x) + i(\mathrm{Im}(\lambda f + \mu g))'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$
où la dernière égalité découle d'un calcul similaire à celui fait en début de démonstration.
2. Notons $f_1 = \mathrm{Re}(f), f_2 = \mathrm{Im}(f), g_1 = \mathrm{Re}(g)$ et $g_2 = \mathrm{Re}(g)$.

On a

$$\begin{aligned} fg(x) &= (f_1(x)+if_2(x))(g_1(x)+ig_2(x)) \\ &= (f_1(x)g_1(x)-f_2(x)g_2(x))+i(f_2(x)g_1(x)+f_1(x)g_2(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{Re}(fg)(x) &=& f_1(x)g_1(x)-f_2(x)g_2(x) \\ \mathrm{Im}(fg)(x) &=& f_2(x)g_1(x)+f_1(x)g_2(x) \end{array}\right.$

Puisque f et g sont dérivables, les fonctions $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f), \mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont dérivables en x donc $\mathrm{Re}(fg)$ et $\mathrm{Im}(fg)$ sont dérivables en x comme somme de produit de fonctions dérivables à valeurs réelles et on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\mathrm{Re}(fg))'(x) &=& f_1'(x)g_1(x)+f_1(x)g_1'(x)-f_2'(x)g_2(x)-f_2(x)g_2'(x) \\ (\mathrm{Im}(fg))'(x) &=& f_2'(x)g_1(x)+f_2(x)g_1'(x)+f_1'(x)g_2(x)+f_1(x)g_2'(x) \end{array}\right.$$

Donc fg est dérivable et on a bien

$$\begin{aligned} f'g(x)+fg'(x) &= (f_1'(x)+if_2'(x))(g_1(x)+ig_2(x))+(f_1(x)+if_2(x))(g_1'(x)+ig_2'(x)) \\ &= (\mathrm{Re}(fg))'(x)+i(\mathrm{Im}(fg))'(x) \\ &= (fg)'(x). \end{aligned}$$

3. Soit $g_1=\mathrm{Re}(g)$ et $g_2=\mathrm{Im}(g)$. Puisque g est dérivable, g_1 et g_2 le sont et on a

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g_1(x)+ig_2(x)}=\frac{g_1(x)}{g_1^2(x)+g_2^2(x)}-i\frac{g_2x)}{g_1^2(x)+g_2^2(x)}.$$

Ainsi, $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{Re}(\frac{1}{g}) &=& \dfrac{g_1}{g_1^2+g_2^2} \\ \mathrm{Im}(\frac{1}{g}) &=& -\dfrac{g_2}{g_1^2+g_2^2}. \end{array}\right.$

Puisque g est dérivable en x, g_1 et g_2 le sont et il en va de même de $\mathrm{Re}(\frac{1}{g})$ et $\mathrm{Im}(\frac{1}{g})$ par opérations sur les fonctions dérivables à valeurs réelles.

On a

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{g}\right)\right)'(x) &= \frac{g_1'(x)(g_1^2(x)+g_2^2(x))-g_1(x)(2g_1'(x)g_1(x)+2g_2'(x)g_2(x))}{(g_1^2(x)+g_2^2(x))^2} \\ &= \frac{g_1'(x)g_2^2(x)-g_1'(x)g_1^2(x)-2g_1(x)g_2(x)g_2'(x)}{(g_1^2(x)+g_2^2(x))^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Im}\left(\frac{1}{g}\right)\right)'(x) &= \frac{-g_2'(x)(g_1^2(x)+g_2^2(x))+g_2(x)(2g_1'(x)g_1(x)+2g_2'(x)g_2(x))}{(g_1^2(x)+g_2^2(x))^2} \\ &= \frac{g_2'(x)g_2^2(x)-g_2'(x)g_1^2(x)+2g_1(x)g_2(x)g_1'(x)}{(g_1^2(x)+g_2^2(x))^2}. \end{aligned}$$

On vérifie alors aisément que

$$\begin{aligned} -\frac{g'(x)}{g^2(x)} &= -\frac{g_1'(x)+ig_2'(x)}{(g_1(x)+ig_2(x))^2} \\ &= -\frac{(g_1'(x)+ig_2'(x))(g_1(x)-ig_2(x))^2}{(g_1^2(x)+g_2^2(x))^2} \\ &= \left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{g}\right)\right)'(x)+i\left(\mathrm{Im}\left(\frac{1}{g}\right)\right)'(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété voulue.

L'extension de cette propriété au quotient de deux fonctions dérivables se montre alors comme dans le cas réel.

■

Proposition 39: Dérivation de $\exp(\varphi)$

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
Alors $\exp \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I, (\exp \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) \exp(\varphi(x)).$$

Démonstration. Notons $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\varphi)$. Ainsi, pour tout $x \in I, \varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$.

Par définition de l'exponentielle complexe, on sait que pour tout $x \in I$,

$$\exp(\varphi(x)) = \exp(\varphi_1(x)) \exp(i\varphi_2(x)) = (\exp(\varphi_1(x)) \cos(\varphi_2(x))) + i(\exp(\varphi_1(x)) \sin(\varphi_2(x))).$$

On a alors

$$(\mathrm{Re}(\exp \circ \varphi))'(x) = e^{\varphi_1(x)}(\varphi_1'(x) \cos(\varphi_2(x)) - \varphi_2'(x) \sin(\varphi_2(x))$$

et

$$(\mathrm{Im}(\exp \circ \varphi))'(x) = e^{\varphi_1(x)}(\varphi_1'(x) \sin(\varphi_2(x)) + \varphi_2'(x) \cos(\varphi_2(x)).$$

Ainsi $(\exp \circ \varphi)'(x) = (\mathrm{Re}(\exp \circ \varphi))'(x) + i(\mathrm{Im}(\exp \circ \varphi))'(x)$ et on vérifie aisément qu'on a $(\exp \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) \exp(\varphi(x))$. ■