Liste d'exercices n°8 — Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Etudier la parité de la fonction $f : x \longmapsto (1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si la fonction f est paire, alors la fonction f' est impaire.
2. Montrer que si la fonction f est impaire, alors la fonction f' est paire.
3. Montrer que si la fonction f est périodique, alors la fonction f' est périodique aussi.

Exercice 3. Déterminer si les fonctions suivantes sont majorées, minorées, bornées sur E. Admettent-elles un maximum, un minimum, une borne supérieure, une borne inférieure ?

1. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = -x^2 + \pi$;
2. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{2-\sin(x)}$;
3. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$;
4. $E = \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 4. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto 3x\cos(x) - 5^x$
2. $x \longmapsto e^x + \dfrac{x}{(\tan(x+1))^7}$
3. $x \longmapsto \sqrt{x^7\cos(x)}$
4. $x \longmapsto \ln\left(\sqrt{3x^2-5}\right)$
5. $x \longmapsto |x^2-4|$
6. $x \longmapsto e^x\ln(\sin(x))$
7. $x \longmapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
8. $x \longmapsto \sqrt{|1-x^2|}$
9. $x \longmapsto |\sin(x)|$
10. $x \longmapsto \ln\left(|x^2-5x+6|\right)$

Exercice 5. Etudier les fonctions suivantes.

1. $f\colon x \longmapsto x^x$
2. $g\colon x \longmapsto x + \sin^2(x)$
3. $h\colon x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Exercice 6. Mener une étude complète des fonctions suivantes.

1. $f\colon x \longmapsto x\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.
2. $g\colon t \longmapsto \dfrac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x-1$.

Exercice 8. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{1}{2}\left(\ln(a)+\ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 9. Montrer que pour tout élément x de $[1;+\infty[$, on a :

$$(x-2)\sqrt{x-1} \geqslant -\frac{2}{3^{3/2}}.$$

Exercice 10.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{x^3} = (x^x)^3$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(x+3) - \ln(x-1) \geqslant 1$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Etudier les variations de f.
4. Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 12. Montrer que pour tout élément x de $]0;1[$, on a :

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 13. Soit x un réel strictement positif. Posons

$$a = \exp(x^2) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right).$$

Simplifier a^b.

Exercice 14.

1. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.
2. En déduire qu'il existe deux nombres réels positifs irrationnels a et b tels que a^b est un nombre rationnel.

Exercice 15.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1,1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0, \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\arctan(\sqrt{x})$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.