Devoir maison n°6
A rendre pour le Jeudi 26 novembre 2026

Problème 1 : Une équation différentielle d'ordre 2 à cœfficients non constants

Le but de ce problème est de résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : \forall x > 0, x^2y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = x^2.$$

Partie I : Résolution par changement de fonction

Soit $y :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On pose pour tout réel $t, z(t) = y(e^t)$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $y(x) = z(\ln(x))$.
2. Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (i.e. z et z' sont dérivables sur $\mathbb{R}$) si et seulement si y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de
$$(F) : \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) = e^{2t}.$$
4. Résoudre (F) sur $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra chercher une solution particulière de (F) sous la forme $z(t) = ae^{2t}$, où $a \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Partie II : Résolution par changement de variable

Soit $y :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose pour tout $x \in]0,+\infty[, u(x) = x^3y(x)$.

1. Montrer que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si u est solution sur $]0,+\infty[$ de
$$(G) : \forall x \in]0,+\infty[, u''(x) - \frac{u'(x)}{x} = x^3.$$
2. Résoudre (G) et en déduire à nouveau les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Problème 2 : Une équation différentielle d'ordre 1 non linéaire

Le but de ce problème est de résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(E) : \forall x \in]0, +\infty[, y'(x) = y\left(\frac{1}{x}\right).$$

On considère $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. (a) En utilisant le fait que f est solution de (E), justifier que f' est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   (b) Démontrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$(E') : \forall x \in]0, +\infty[, x^2 y''(x) + y(x) = 0.$$

2. On introduit la fonction $z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $z(x) = f(e^x)$.
   (a) Justifier que z est deux fois dérivable et montrer que z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(E'') : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y'(x) + y(x) = 0.$$

   (b) Donner les solutions de (E'') sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire qu'il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).$$

   (d) Calculer $f(1)$ puis $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (e) En calculant $f'(1)$ de deux manières différentes, montrer que

$$\lambda = \sqrt{3}\mu.$$

   (f) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Réciproquement, vérifier que toute fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = c\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right),$$

   où c est une constante réelle, est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Conclure quant aux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant la condition $f(1) = \sqrt{3}$ et donner l'expression de cette fonction. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.