

Liste d'exercices n°8

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Etudier la parité de la fonction $f : x \mapsto (1 - x^2) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si la fonction f est paire, alors la fonction f' est impaire.
2. Montrer que si la fonction f est impaire, alors la fonction f' est paire.
3. Montrer que si la fonction f est périodique, alors la fonction f' est périodique aussi.

Exercice 3. Déterminer si les fonctions suivantes sont majorées, minorées, bornées sur E . Admettent-elles un maximum, un minimum, une borne supérieure, une borne inférieure ?

1. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = -x^2 + \pi$;
2. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{2 - \sin(x)}$;
3. $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$;
4. $E = \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 4. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto 3x \cos(x) - 5^x$
2. $x \mapsto e^x + \frac{x}{(\tan(x+1))^7}$
3. $x \mapsto \sqrt{x^7 \cos(x)}$
4. $x \mapsto \ln(\sqrt{3x^2 - 5})$
5. $x \mapsto |x^2 - 4|$
6. $x \mapsto e^x \ln(\sin(x))$
7. $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
8. $x \mapsto \sqrt{|1 - x^2|}$
9. $x \mapsto |\sin(x)|$
10. $x \mapsto \ln(|x^2 - 5x + 6|)$

Exercice 5. Etudier les fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto x^x$
2. $g : x \mapsto x + \sin^2(x)$
3. $h : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Exercice 6. Mener une étude complète des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto x \exp \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$.
2. $g : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 8. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{1}{2} (\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

Exercice 9. Montrer que pour tout élément x de $[1; +\infty[$, on a :

$$(x-2)\sqrt{x-1} \geq -\frac{2}{3^{3/2}}.$$

Exercice 10.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{x^3} = (x^x)^3$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(x+3) - \ln(x-1) \geq 1$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Etudier les variations de f .
4. Représenter graphiquement la fonction f .

Exercice 12. Montrer que pour tout élément x de $]0; 1[$, on a :

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Exercice 13. Soit x un réel strictement positif. Posons

$$a = \exp(x^2) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{x} \ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right).$$

Simplifier a^b .

Exercice 14.

1. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.
2. En déduire qu'il existe deux nombres réels positifs irrationnels a et b tels que a^b est un nombre rationnel.

Exercice 15.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2 \arctan(\sqrt{x})$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.