Lycée Fénelon
Année 2025-2026

PCSI
A. Panetta

Devoir maison n°3 (facultatif)

Combinaisons avec répétition

Le but de problème est d'étudier les combinaisons avec répétition.

Soit E un ensemble et p un entier naturel. Une p-combinaison avec répétition prise parmi les éléments de E est la donnée de p éléments de E, sans ordre, mais qui peuvent se répéter.

Par exemple, considérons $E = \{a, b, c\}$. Pour éviter toute ambiguïté de notation, on notera les combinaisons de la manière suivante : $< a, a, b >$ (ceci représente la 3-combinaison d'éléments de E composée par l'élément a, pris 2 fois, et l'élément b, pris 1 fois). Bien entendu, on a alors : $< a, a, b > = < a, b, a > = < b, a, a >$, mais $< a, a, b > \neq < a, b >$ et $< a, a, b > \neq < a, b, b >$, etc.

Il est clair que le nombre de p-combinaisons avec répétition prises parmi les éléments de E ne dépend que de p et du cardinal de E. Dans la suite, nous noterons Γ_n^p le nombre de p-combinaisons avec répétition d'éléments d'un ensemble de cardinal n.

1. Pour $p = 1, 2$ et 3, donner explicitement toutes les p-combinaisons avec répétition prises parmi les éléments de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.
2. On rappelle que dans un jeu de dominos, chaque domino est imprimé sur une seule face, qui comporte deux moitiés, chacune d'entre elles contenant un nombre entre 0 et 6. Comme on peut retourner les dominos, il n'y a pas d'ordre entre les deux moitiés du domino. Tous les dominos possibles apparaissent une et une seule fois dans le jeu (par exemple il y a un et un seul domino comportant un 1 et un 2, un et un seul domino comportant deux 0, etc.).

   Combien y a-t-il de dominos dans un jeu de dominos ?

   Interpréter ce résultat en termes de combinaisons avec répétition.

   Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul et p est un entier naturel. On va à présent calculer Γ_n^p.
3. Montrer que le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $\dbinom{n}{p}$.
4. Soit f une application croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

   Montrer que l'application g définie sur $\llbracket 1, p \rrbracket$ par $g(k) = f(k) + k - 1$ est strictement croissante à valeurs dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.
5. Notons E l'ensemble des applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et F l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.

   Dans la question précédente, on a donc construit une application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & g. \end{array}$$

   On va montrer que φ est bijective.

(a) Soit $g \in F$. Supposons qu'on dispose d'un antécédent de g par φ, noté f. Donner une expression de $f(k)$ à l'aide de g pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.

(b) Réciproquement, définissons une fonction $f : [\![1,p]\!] \longrightarrow \mathbb{Z}$ par la formule de la question précédente. Montrer que f est croissante sur $[\![1,p]\!]$.

(c) En déduire que f est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

(d) Conclure quant à la bijectivité de φ.

(e) En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

6. (a) Montrer qu'il y a autant d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ que de p-combinaisons avec répétition d'éléments de $[\![1,n]\!]$.

   (b) En déduire le nombre Γ_n^p de combinaisons avec répétition à p éléments d'un ensemble de cardinal n. Retrouver le résultat de la question 2.

   (c) On lance trois dés à 6 faces identiques. Combien y a-t-il de tirages (non ordonnés) possibles ?

7. (a) Soient m un entier naturel non nul et k un entier naturel. Montrer que l'on a

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k}{k}.$$

   (b) En déduire la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \Gamma_n^k = \Gamma_{n+1}^p$. (On pose par convention $\Gamma_n^0 = 1$.)

   (c) Donner une interprétation **combinatoire** de l'égalité précédente.

8. Dénombrer les p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \cdots + x_p \leqslant n$.
   Même question avec $x_1 + \cdots + x_p = n$.

9. J'ai a chaussettes noires parfaitement indistinguables que je souhaite ranger dans b tiroirs numérotés. Ainsi, un rangement est déterminé par le nombre de chaussettes contenu dans le tiroir 1, dans le tiroir 2, etc. (les chaussettes n'étant pas identifiables).
   A l'aide des nombres Γ_n^p, exprimer le nombre de rangements possibles.