
DEVOIR MAISON N°4
A RENDRE POUR LE LUNDI 3 NOVEMBRE 2025

Exercice 1 : Méthode de Cardan

Le but de ce problème est de trouver une méthode pour obtenir les racines (complexes) d'une équation de degré 3. On admettra qu'une équation de degré 3 à coefficients complexes admet au plus trois racines complexes.

Partie I : Préliminaires

On rappelle qu'on note j le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = z_0^3$ sur $\mathbb{C}$ est $\{z_0, jz_0, j^2z_0\}$.
2. Donner l'ensemble des solutions des équations $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ sur $\mathbb{C}$.

Partie II : Résolution d'une équation de degré 3.

On considère l'équation de degré 3 suivante :

$$(E) : x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0.$$

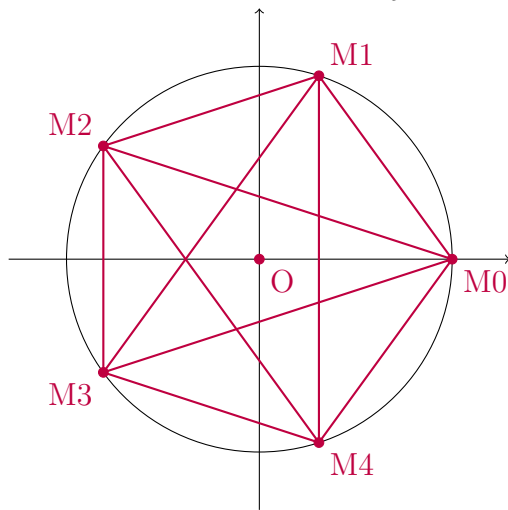
1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ et en déduire que l'équation (E) admet trois solutions réelles distinctes.
2. Soit x une solution de (E) , et h un nombre complexe fixé. On pose $z = x + h$. Déterminer une équation de degré 3 vérifiée par z . Montrer que pour une valeur de h bien choisie, l'équation obtenue ne comporte pas de terme de degré 2.
3. On considère désormais l'équation $(E') : z^3 - 3z - 1 = 0$. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. On suppose que :

$$\begin{cases} U + V &= 1 \\ uv &= 1. \end{cases} \quad (*)$$

- (a) Montrer que $u + v$ est racine de l'équation (E') .
 - (b) A l'aide des valeurs de $U + V$ et de UV , déterminer un trinôme du second degré à coefficients réels dont U et V sont les racines.
 - (c) Calculer U et V , les écrire sous forme exponentielle, puis en déduire toutes les paires $\{u, v\}$ respectant $(*)$. *On pourra utiliser les résultats de la Partie I.*
 - (d) Donner les trois racines de (E') .
4. Résoudre (E) .

Exercice 2 : Diagonale d'un pentagone régulier

1. On pose $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, $S = a + a^4$ et $T = a^2 + a^3$.
 - (a) Montrer que $S = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $T = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
 - (b) Calculer $S + T$ et ST .
 - (c) En déduire un trinôme du second degré dont les racines sont S et T .
 - (d) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. On considère le plan orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, on appelle M_k le point du plan d'affixe $z_k = \exp\left(\frac{2i\pi k}{5}\right)$.



- (a) Montrer que le pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$ est régulier, c'est à dire que

$$M_0M_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_0,$$

$$(\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_3}, \overrightarrow{OM_4}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_4}, \overrightarrow{OM_0}}) = \frac{2\pi}{5}$$

et

$$(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_4}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_0}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_3M_4}, \overrightarrow{M_3M_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_4M_0}, \overrightarrow{M_4M_3}}) = \frac{3\pi}{5}.$$

On appelle L la longueur d'un côté de ce pentagone.

- (b) On appelle diagonales du pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$ les segments $[M_0M_2]$, $[M_1M_3]$, $[M_2M_4]$, $[M_3M_0]$ et $[M_4M_1]$.

Montrer que les diagonales ont toutes la même longueur D , puis que $\frac{D}{L} = \varphi$ où φ désigne le nombre d'or.

- (c) En déduire la longueur de la diagonale d'un pentagone régulier de côté 1.