

## Espaces vectoriels

### 1. Familles de vecteurs

- Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux familles telles que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ , alors  $\mathcal{F}$  liée  $\Rightarrow \mathcal{F}'$  liée (et donc  $\mathcal{F}'$  libre  $\Rightarrow \mathcal{F}$  libre).
- Une famille est liée *si et seulement si* au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.  
Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre,  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$  est libre *si et seulement si*  $e_{n+1} \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ .  
Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
- Base : définition (famille libre et génératrice), caractérisation (tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille).  
Bases canoniques de  $K^n$ ,  $K_n[X]$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ , définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.

### 2. Sommes de deux ssev

- Définition de la somme de deux ssev  $F_1$  et  $F_2$  (ensemble des vecteurs de la forme  $x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F_1$  et  $x_2 \in F_2$ ).  
 $F_1 + F_2$  est le plus petit ssev contenant  $F_1$  et  $F_2$ .  
Somme directe (intersection réduite à  $0_E$ ), notation  $F_1 \oplus F_2$ , caractérisation par l'unicité de l'écriture  $x = x_1 + x_2$  pour tout vecteur  $x$  de  $F_1 + F_2$ .
- Ssev supplémentaires : deux ssev  $F_1$  et  $F_2$  de  $E$  sont dits supplémentaires si  $F_1 + F_2 = E$  et  $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ .  
 $F_1 \oplus F_2 = E$  *si et seulement si* tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique sous la forme  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F_1$  et  $x_2 \in F_2$ . Exemples.
- Liens entre sommes de ssev et bases : base adaptée à une somme directe, si  $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  est libre (resp. une base), alors  $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $\text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$  sont en somme directe (resp. supplémentaires).

## Espaces vectoriels de dimension finie

### 1. Définition de la dimension, propriétés

- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples. De toute famille génératrice finie on peut extraire une base (admis), théorème de la base incomplète. Si  $E$  admet une famille génératrice de cardinal  $p$ , toute famille d'au moins  $p + 1$  vecteurs est liée (admis). Corollaire : toutes les bases ont le même cardinal. La dimension est le cardinal commun de toutes les bases. Exemples.
- Si  $E$  est de dimension finie  $n$ , toute famille libre (resp. génératrice) a au plus  $n$  vecteurs (resp. au moins  $n$  vecteurs) ; une famille libre (resp. génératrice) de  $n$  vecteurs est une base.

### 2. Dimension des sous-espaces vectoriels

- Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ , avec égalité si et seulement si  $F = E$  (admis).
- Rang d'une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ . Si  $E$  est de dimension finie  $n$ , le rang est toujours inférieur à  $n$  (resp.  $p$ ) avec égalité *si et seulement si* la famille est génératrice (resp. libre). Lorsque  $E$  est de dimension finie, lien avec la résolution d'un système.
- Si  $E$  est de dimension finie, tout sous-espace  $F$  de  $E$  admet un supplémentaire. Dimension de la somme de deux sous-espaces en somme directe, application à la dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann pour la somme de deux sous-espaces quelconques (admise). Caractérisations du fait que deux sous-espaces sont supplémentaires à l'aide des dimensions.

## Questions de cours envisageables

1. Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
2. Si  $\dim(E) = n$ , le rang d'une famille de  $p$  vecteurs de  $E$  est inférieur à  $n$  (resp.  $p$ ), avec égalité *si et seulement si* la famille est génératrice (resp. libre).
3. Si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $F, G$  sont deux ssev de  $E$ , alors :  
 $F \oplus G = E \iff (F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim F + \dim G = n) \iff (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = n)$ .