PCSI, Mathématiques, 2023-2024

Colle n° 8, semaine du 20/11 au 25/11

Primitives, Equations différentielles linéaires

1. Changement de variable. Application à la recherche de primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.
2. **Equations différentielles linéaires d'ordre un**
   (équations de la forme $y' + a(x)y = b(x)$, avec a, b fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :
   — Résolution de l'équation homogène associée $y' + a(x)y = 0$.
   — Description de l'ensemble des solutions à l'aide d'une solution particulière.
   — Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante.
   — Existence et unicité de la solution de $y' + a(t)y = b(t)$ vérifiant la condition $y(t_0) = k_0$ ($t_0 \in I, k_0 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
3. **Equations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants**
   — Résolution des équations homogènes $y'' + ay' + by = 0$: solutions complexes lorsque a, b sont complexes, réelles lorsque a, b sont réels.
   — Structure des solutions de $y'' + ay' + by = f(x)$ avec f continue de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   — Forme d'une solution particulière lorsque $f(x) = Ce^{\lambda x}$ où C, λ sont des constantes réelles ou complexes.
   Passage sur $\mathbb{C}$ pour des équations à coefficients réels et un second membre de la forme $B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$ avec B et ω réels.
   Utilisation du principe de superposition, lorsque le second membre est une somme de fonctions des types précédents.
   — Existence et unicité de la solution de $y'' + ay' + by = f(t)$ vérifiant les conditions $\left\{\begin{array}{rcl} y(t_0) & = & k_1 \\ y'(t_0) & = & k_2 \end{array}\right.$ avec $t_0 \in I$, k_1, k_2 réels ou complexes fixés (admis).

Suites réelles

1. **Nombres réels**
   Majorants, minorants d'une partie de $\mathbb{R}$, définition de la borne supérieure ou inférieure. Existence d'une borne supérieure (resp. inférieure) pour une partie non vide majorée (resp. minorée) (admis).
   Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ (admis).
2. **Généralités sur les suites**
   — Modes de définition d'une suite. Suites constantes, stationnaires. Monotonie d'une suite réelle, exemples d'étude. Suites réelles majorées, minorées, bornées.
   — Suites particulières : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux (formules admises dans ce dernier cas).
3. **Limite d'une suite réelle**
   — Définition d'une suite convergente, unicité de la limite (principe de la preuve).
   — Toute suite convergente est bornée (la réciproque est fausse).