PCSI, Mathématiques, 2025-2026

Colle n° 10, semaine du 01/12 au 06/12

Suites numériques

Révisions du programme précédent
Limite d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Théorèmes d'existence d'une limite pour les suites réelles

- Convergence d'une suite par encadrement (théorème des « gendarmes »). Le produit d'une suite de limite 0 et d'une suite bornée converge vers 0.
- Divergence d'une suite vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) par minoration (resp. majoration).
- Convergence des suites monotones.
- Définition de deux suites adjacentes. Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

Suites extraites

- Définition d'une suite extraite, exemples.
- Toute suite extraite d'une suite admettant une limite ℓ finie ou infinie admet la même limite. Application : preuve de la divergence d'une suite à l'aide d'une ou plusieurs suites extraites.

Suites à valeurs complexes

- Extension des définitions et résultats non liés à l'ordre aux suites complexes : suites convergentes, bornées, etc.
- Comportement des suites géométriques complexes selon la raison.
- Caractérisation de la convergence à l'aide des parties réelles et imaginaires.

Limites et continuité des fonctions

On considère des fonctions définies sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. **Limite en un point**
   - Limite finie en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ($a \in D$ ou bien a est une extrémité de D). Exemples.
     Cas des taux d'accroissements, exemple avec les imites usuelles des fonctions suivantes en 0 : $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{e^x - 1}{x}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\dfrac{\tan x}{x}$. Application à la limite en 0 de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.
     Propriétés : unicité de la limite ; si f a une limite finie en a, elle est bornée au voisinage de a.
   - Limites infinies, limites à droite, à gauche.
   - Opération algébriques sur les limites, formes indéterminées usuelles.
   - Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'existence de limite (finie ou infinie) par encadrement. Limites de fonctions monotones.
2. **Continuité en un point**
   - Définition de la continuité en un point $a \in D$. Continuité à droite, à gauche. Exemple de la partie entière.
   - Prolongement par continuité de f en un point a extrémité de D, n'appartenant pas à D, lorsque f admet une limite finie en a.
   - Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point, composition de fonctions continues.
3. **Fonctions continues sur un intervalle**
   - Théorème des valeurs intermédiaires. Cas particulier : si f est continue et change de signe sur un intervalle I, alors f s'annule sur I.
     Image d'un segment par une fonction continue (admis).
   - Théorème de la bijection continue : toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, dont la réciproque est continue et de même sens de variation (admis).

Questions de cours envisageables

1. Limite d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.
3. Convergence d'une suite géométrique complexe en fonction de sa raison.