PCSI, Mathématiques, 2025-2026

Colle n° 11, semaine du 08/12 au 13/12

Limites et continuité des fonctions

On considère des fonctions définies sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (sauf au dernier paragraphe).

1. **Limite en un point**
   - Limite finie en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ($a \in D$ ou bien a est une extrémité de D). Exemples.
     Cas des taux d'accroissements, exemple avec les imites usuelles des fonctions suivantes en 0 : $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{e^x - 1}{x}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\dfrac{\tan x}{x}$. Application à la limite en 0 de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.
     Propriétés : unicité de la limite ; si f a une limite finie en a, elle est bornée au voisinage de a.
   - Limites infinies, limites à droite, à gauche.
   - Opération algébriques sur les limites, formes indéterminées usuelles.
   - Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'existence de limite (finie ou infinie) par encadrement. Limites de fonctions monotones.
2. **Continuité en un point**
   - Définition de la continuité en un point $a \in D$. Continuité à droite, à gauche. Exemple de la partie entière.
   - Prolongement par continuité de f en un point a extrémité de D, n'appartenant pas à D, lorsque f admet une limite finie en a.
   - Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point.
3. **Fonctions continues sur un intervalle**
   - Théorème des valeurs intermédiaires. Cas particulier : si f est continue et change de signe sur un intervalle I, alors f s'annule sur I. Image d'un segment par une fonction continue (admis).
   - Théorème de la bijection continue : toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, dont la réciproque est continue et de même sens de variation (admis).
4. **Extension aux fonctions à valeurs complexes**
   Extension des notions de limites, continuité, fonctions bornées, etc. aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation d'une limite ou de la continuité à l'aide des parties réelles et imaginaires.

Dérivation

1. **Dérivabilité en un point**
   Rappels sur dérivabilité en un point, l'équation de la tangente au graphe. La dérivabilité implique la continuité. Dérivée à droite et à gauche en un point. Développement limité d'ordre 1 en un point.
2. **Opérations sur les dérivées**
   Rappel sur les opérations : somme, produit, quotient et composition de fonctions dérivables, fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable (formules admises).
3. **Fonctions dérivables sur un intervalle**
   - Extremum local en un point x_0 d'une fonction f dérivable sur un intervalle I : condition nécessaire sur $f'(x_0)$ si x_0 n'est pas une extrémité de I.
   - Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, et inégalité des accroissements finis : si $|f'| \leqslant M$ sur un intervalle I, f est M-lipschitzienne sur I.
   - Applications des accroissements finis : caractérisation de la monotonie sur un intervalle par le signe de la dérivée, théorème de la limite d'une dérivée : si f est continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et que f' admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet la limite ℓ en a ; en particulier f est dérivable en a si ℓ est finie, avec $f'(a) = \ell$.

Questions de cours envisageables

1. Si f est dérivable sur un intervalle I et admet un extremum local en un point x_0 qui n'est pas une extrémité de I, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Théorème de Rolle.
3. Théorème de la limite d'une dérivée.