PCSI, Mathématiques, 2025-2026

Colle n° 13, semaine du 05/01 au 10/01

Dérivation

1. **Dérivées d'ordre supérieur**
   Fonctions de classe $\mathcal{D}^n$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$. Calcul des dérivées n-ièmes pour les exemples suivants : fonctions puissances, $\cos, \sin, \exp, \ln$. Opérations sur les dérivées d'ordre supérieur, formule de Leibniz pour la dérivée n-ième d'un produit. et application aux dérivées successives d'une composée et d'un quotient (admis).
2. **Fonctions convexes**
   — Définition d'une fonction convexe ou concave sur un intervalle. Exemples.
   — Caractérisation pour les fonctions dérivables : si f' est croissante sur I, alors f est convexe (réciproque admise). Utilisation du signe de f'' pour les fonctions deux fois dérivables.
   Si f est convexe et dérivable, la courbe de f est au dessus de ses tangentes.
3. **Fonctions dérivables à valeurs complexes**
   Les théorème de Rolle et des accroissements finis ne sont plus vrais, l'inégalité des accroissements finis reste vraie (avec des modules).

Matrices

1. **Définition, opérations sur les matrices**
   — Matrice de format (n, p) à coefficients dans K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), notation $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.
   — Addition de deux matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire. Toute matrice est combinaison linéaire des matrices de base $E_{i,j}$.
   — Définition du produit d'une matrice de format (n, p) par une matrice colonne à p lignes, puis plus généralement par une matrice de format (p, q). Formule sur les coefficients du produit, calcul pratique.
   — Propriétés du produit : associativité, bilinéarité (admises).
   — Transposition : définition, transposée d'une combinaison linéaire, d'un produit de deux matrices.
2. **Opérations élémentaires**
   — Définition des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.
   — Définition des matrices carrées élémentaires associées aux opérations élémentaires sur les lignes : matrices de permutation, transvection ou dilatation.Traduction matricielle des opérations sur les lignes ou colonnes.
3. **Systèmes linéaires**
   — Définition d'un système linéaire de n équations à p inconnues. Système homogène, second membre. Définition de la matrice associée A (de format (n, p)) et de la matrice B second membre (de format $(n, 1)$).
   — Définition de la compatibilité. Un système est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A. Pour un système compatible, description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.
4. **Matrices carrées d'ordre n**
   — Matrice identité de taille n, notée I_n. Matrices symétriques et antisymétriques, puissances d'une matrice, formule du binôme pour les matrices qui commutent.
   — Matrices triangulaires supérieures et inférieures. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure), expression de ses coefficients diagonaux.
   Matrices diagonales. Produit de deux matrices diagonales, puissances d'une matrice diagonale.
   — Matrices carrées inversibles. On admet que A inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $AB = I_n$. Exemples, inversibilité des matrices élémentaires. Inverse d'un produit de deux matrices inversibles, inverse de la transposée d'une matrice inversible.
   A est inversible si et seulement si le système $AX = B$ admet une unique solution pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. Application pratique au calcul de l'inverse par résolution d'un système.
   Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires. Cas des matrices diagonales : expression de l'inverse.

Questions de cours envisageables

1. Si f est dérivable sur un intervalle I et que f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.
2. Transposée d'un produit de deux matrices.
3. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure, expression des coefficients diagonaux.