

## Colle n° 14, semaine du 12/01 au 17/01

## Matrices

### 1. Définition, opérations sur les matrices

- Matrice de format  $(n, p)$  à coefficients dans  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), notation  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ .
- Addition de deux matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire. Toute matrice est combinaison linéaire des matrices de base  $E_{i,j}$ .
- Définition du produit d'une matrice de format  $(n, p)$  par une matrice colonne à  $p$  lignes, puis plus généralement par une matrice de format  $(p, q)$ . Formule sur les coefficients du produit, calcul pratique.
- Propriétés du produit : associativité, bilinéarité (admis).
- Transposition : définition, transposée d'une combinaison linéaire, d'un produit de deux matrices.

### 2. Opérations élémentaires

- Définition des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.
- Définition des matrices carrées élémentaires associées aux opérations élémentaires sur les lignes : matrices de permutation, transvection ou dilatation. Traduction matricielle des opérations sur les lignes ou colonnes.

### 3. Systèmes linéaires

- Définition d'un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues. Système homogène, second membre. Définition de la matrice associée  $A$  (de format  $(n, p)$ ) et de la matrice  $B$  second membre (de format  $(n, 1)$ ).
- Définition de la compatibilité. Un système est compatible si et seulement si  $B$  est combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . Pour un système compatible, description de l'ensemble des solutions.

### 4. Matrices carrées d'ordre $n$

- Matrice identité de taille  $n$ , notée  $I_n$ . Matrices symétriques et antisymétriques, puissances d'une matrice, formule du binôme pour les matrices qui commutent.
- Matrices triangulaires supérieures et inférieures. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure), expression de ses coefficients diagonaux.
- Matrices diagonales. Produit de deux matrices diagonales, puissances d'une matrice diagonale.
- Matrices carrées inversibles. On admet que  $A$  inversible  $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(K)$  tq  $AB = I_n$ . Exemples, inversibilité des matrices élémentaires. Inverse d'un produit, inverse de la transposée.
- $A$  est inversible si et seulement si le système  $AX = B$  admet une unique solution pour tout  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ . Application pratique au calcul de l'inverse par résolution d'un système.
- Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires. Cas des matrices diagonales : expression de l'inverse.

## Polynômes

### 1. Définitions et opérations

- Définition de  $K[X]$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), du degré, du coefficient dominant pour  $P \neq 0$ . Polynômes unitaires. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Addition et multiplication de deux polynômes : définitions, propriétés. Le degré d'une somme est inférieur ou égal au maximum des deux degrés (avec égalité si les degrés sont différents) celui d'un produit égal à la somme des degrés, et le coefficient dominant du produit (s'il est non nul) est égal au produit des 2 coefficients dominants.
- Composition de deux polynômes.

### 2. Divisibilité et division euclidienne

- Diviseurs et multiples dans  $K[X]$ . Division euclidienne dans  $K[X]$  (existence admise). Méthode pratique de la division, exemples. Cas d'une division par un polynôme unitaire de degré 1.

### 3. Déivation

- Dérivée d'un polynôme, dérivée d'une somme et d'un produit. Dérivées successives. Expression des coefficients à l'aide des dérivées en 0. Formule de Taylor en un point  $\alpha \in K$ .

### 4. Racines

- $\alpha \in K$  est une racine d'un polynôme  $P$  si  $P(\alpha) = 0$ . C'est équivalent à  $X - \alpha$  divise  $P$ . Un polynôme de degré  $n \geq 0$  (donc non nul) admet au plus  $n$  racines distinctes.

## Questions de cours envisageables

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2.  $A$  est inversible si et seulement si le système  $AX = B$  admet une unique solution pour tout  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ .
3. Division euclidienne dans  $K[X]$ , preuve de l'unicité.