Colle n° 16, semaine du 26/01 au 31/01

Polynômes

1. **Racines**
   — Racines multiples : définition de la multiplicité d'une racine α de P (plus grand entier m tel que $(X-\alpha)^m$ divise P). Caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées successives.
   — Polynôme scindé sur K. Relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé : expressions de la somme et du produit des racines (comptées avec leurs multiplicités).
2. **Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$**
   — Polynômes irréductibles dans $K[X]$: définition, exemples. Tout polynôme de degré un est irréductible (dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$).
   — Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe (preuve hors-programme).
   Conséquences : tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé, et un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est irréductible si et seulement s'il est de degré 1.
   — Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, α est racine de P de multiplicité m *si et seulement si* $\overline{\alpha}$ est racine de P de multiplicité m.
   Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est irréductible si et seulement s'il est de degré un ou bien de degré deux avec un discriminant strictement négatif. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant se décompose en produit de polynômes irréductibles.
   Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine réelle.
3. **Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles**
   — Vocabulaire : fractions et fonctions rationnelles, fractions irréductibles, pôles.
   — Expression de la décomposition en éléments simples pour une fraction rationnelle à pôles simples (preuve hors-programme). Méthode pour trouver les coefficients dans la décomposition. Application aux calculs de primitives.

Ensembles

1. Appartenance, inclusion, ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E. Egalité entre deux ensembles, exemples de raisonnement par double inclusion.
2. Opérations sur les ensembles : définitions et propriétés de la réunion et de l'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles. Distributivité de la réunion sur l'intersection et réciproquement. Complémentaire d'une partie dans un ensemble : formules pour le complémentaire d'une union ou d'une intersection quelconque.
   Produit cartésien de deux ou plusieurs ensembles.

Questions de cours envisageables

1. Si $\forall 0 \leqslant k \leqslant m-1,\ P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$, alors α est racine de multiplicité m de P.
2. Formule pour le coefficient devant $\dfrac{1}{X-a_i}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{(X-a_1)\cdots(X-a_n)}$ (pour $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$).
3. Distributivité de l'intersection (resp. union) sur une union (resp. intersection) quelconque d'ensembles.