

Colle n° 18, semaine du 09/02 au 14/02

Analyse asymptotique

1. Relations de comparaison entre fonctions au voisinage d'un point a

- Relation de domination, relation de négligeabilité : définitions, notations o et O , lien entre les deux relations, règles de calculs.
- Relations de négligeabilité usuelles en $+\infty$ et en 0 : comparaison des fonctions puissance, croissances comparées.
- Fonctions équivalentes au voisinage de a : définition, exemples, propriétés. Equivalents usuels au voisinage de 0. Liens entre équivalence et négligeabilité :
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.
- Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.

2. Relations de comparaison entre suites réelles

Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence entre suites.

$$x^n = o(y^n) \iff |x| < |y| ; \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et tout } q \text{ tel que } |q| > 1, n^\alpha = o(q^n).$$

3. Développements limités

On abrège développement limité en DL.

- Définition : DL à l'ordre n au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ ou de $\pm\infty$. Lien avec la limite et la dérивabilité (lorsque $a \in \mathbb{R}$) pour les DL d'ordre 0 et 1.
- Unicité du DL, application au DL des fonctions paires ou impaires en 0.
- Intégration terme à terme du DL d'une dérivée (admis).
- Obtention d'un DL d'ordre n par la formule de Taylor-Young pour une fonction de classe \mathcal{C}^n (formule admise).

4. DL des fonctions usuelles en 0

- DL à tout ordre au voisinage de 0 des fonctions suivantes : $\exp, \text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin, x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- Par intégration terme à terme, on en déduit ceux de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de \arctan au voisinage de 0.

5. Opérations sur les DL

Somme, produit, quotient de DL (résultats admis). Application : DL d'ordre 5 de \tan au voisinage de 0.

6. Applications des DL

- Recherche de limites et d'équivalents.
- Etude locale d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : recherche de la tangente en un point et étude de la position locale de la courbe par rapport à sa tangente ; cas d'un point critique : condition suffisante pour l'existence d'un extremum local.