

Espaces vectoriels

1. Sous-espaces vectoriels (ssev)

Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, alors $\text{vect}(\mathcal{F}_1) \subset \text{vect}(\mathcal{F}_2)$.

$\text{vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) \iff e_{n+1} \in \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$.

2. Familles de vecteurs

— Famille génératrice, famille génératrice d'un ssev : définitions, exemples.

— Famille liée, libre : définitions, cas d'une famille de deux vecteurs. Exemples dans K^n : lien avec la résolution d'un système homogène à n équations et p inconnues (nombre de vecteurs de la famille). Si $p \geq n + 1$, toute famille de p vecteurs de K^n est liée (admis).

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux familles telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, alors $\mathcal{F}$ liée $\Rightarrow \mathcal{F}'$ liée (et donc $\mathcal{F}'$ libre $\Rightarrow \mathcal{F}$ libre).

— Une famille est liée *si et seulement si* au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est libre *si et seulement si* $e_{n+1} \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.

— Base : définition (famille libre et génératrice), caractérisation (tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille).

Bases canoniques de K^n , $K_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.

3. Sommes de deux ssev

— Définition de la somme de deux ssev F_1 et F_2 (ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$).
 $F_1 + F_2$ est le plus petit ssev contenant F_1 et F_2 .

Somme directe (intersection réduite à 0_E), notation $F_1 \oplus F_2$, caractérisation par l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$ pour tout vecteur x de $F_1 + F_2$.

— Ssev supplémentaires : deux ssev F_1 et F_2 de E sont dits supplémentaires si $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

$F_1 \oplus F_2 = E$ *si et seulement si* tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Exemples.

— Liens entre sommes de ssev et bases : base adaptée à une somme directe, si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est libre (resp. une base), alors $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe (resp. supplémentaires).

Questions de cours envisageables

1. Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.

2. $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F_1 et F_2 .

3. La somme $F_1 + F_2$ est directe *si et seulement si* tout vecteur x de $F_1 + F_2$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.