

Espaces vectoriels : sommes de deux ssev

- Définition de la somme de deux ssev F_1 et F_2 (ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$). $F_1 + F_2$ est le plus petit ssev contenant F_1 et F_2 .
Somme directe (intersection réduite à 0_E), notation $F_1 \oplus F_2$, caractérisation par l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$ pour tout vecteur x de $F_1 + F_2$.
- Ssev supplémentaires : deux ssev F_1 et F_2 de E sont dits supplémentaires si $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
 $F_1 \oplus F_2 = E$ si et seulement si tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Exemples.
- Liens entre sommes de ssev et bases : base adaptée à une somme directe, si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est libre (resp. une base), alors $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe (resp. supplémentaires).

Espaces vectoriels de dimension finie**1. Définition de la dimension, propriétés**

- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples. De toute famille génératrice finie on peut extraire une base (admis), théorème de la base incomplète. Si E admet une famille génératrice de cardinal p , toute famille d'au moins $p + 1$ vecteurs est liée (admis). Corollaire : toutes les bases ont le même cardinal. La dimension est le cardinal commun de toutes les bases. Exemples.
- Si E est de dimension finie n , toute famille libre (resp. génératrice) a au plus n vecteurs (resp. au moins n vecteurs) ; une famille libre (resp. génératrice) de n vecteurs est une base.

2. Dimension des sous-espaces vectoriels

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$ (admis).
- Rang d'une famille de p vecteurs de E . Si E est de dimension finie n , le rang est toujours inférieur à n (resp. p) avec égalité si et seulement si la famille est génératrice (resp. libre). Lorsque E est de dimension finie, lien avec la résolution d'un système.
- Si E est de dimension finie, tout sous-espace F de E admet un supplémentaire. Dimension de la somme de deux sous-espaces en somme directe, application à la dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann pour la somme de deux sous-espaces quelconques (admise). Caractérisations du fait que deux sous-espaces sont supplémentaires à l'aide des dimensions.

Applications

X et Y désignent deux ensembles quelconques.

- Définition d'une application de X dans Y . Notations $\mathcal{A}(X, Y)$, $\mathcal{F}(X, Y)$ ou Y^X .
- Fonction indicatrice d'un sous-ensemble A d'un ensemble E . Formules pour la fonction indicatrice du complémentaire, d'une intersection, d'une réunion.
- Pour $f \in \mathcal{A}(X, Y)$, définition de l'image directe d'une partie A de X , notée $f(A)$, et de l'image réciproque d'une partie B de Y , notée $f^{-1}(B)$.
- Composée de deux applications, associativité de la composition. Restriction, prolongement d'une application.

Questions de cours envisageables

1. La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si tout vecteur x de $F_1 + F_2$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.
2. Si $\dim(E) = n$, le rang d'une famille de p vecteurs de E est inférieur à n (resp. p), avec égalité si et seulement si la famille est génératrice (resp. libre).
3. Si E est de dimension finie n et F, G sont deux ssev de E , alors :
 $F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = n \iff F + G = E$ et $\dim F + \dim G = n$.