

Suites numériques

1. Limite d'une suite réelle

- Limites infinies.
- Opérations sur les limites : limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites convergentes (avec une limite non nulle pour le dénominateur dans le dernier cas). Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
- Passage à la limite dans les inégalités larges. Limite d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Théorèmes d'existence d'une limite pour les suites réelles

- Convergence d'une suite par encadrement (théorème des « gendarmes »). Le produit d'une suite de limite 0 et d'une suite bornée converge vers 0.
- Divergence d'une suite vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) par minoration (resp. majoration).
- Convergence des suites monotones.
- Définition de deux suites adjacentes. Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

3. Suites extraites

- Définition d'une suite extraite, exemples.
- Toute suite extraite d'une suite admettant une limite ℓ finie ou infinie admet la même limite. Application : preuve de la divergence d'une suite à l'aide d'une ou plusieurs suites extraites.

4. Suites à valeurs complexes

- Extension des définitions et résultats non liés à l'ordre aux suites complexes : suites convergentes, bornées, etc.
- Comportement des suites géométriques complexes selon la raison.
- Caractérisation de la convergence à l'aide des parties réelles et imaginaires (admis).

Limites et continuité des fonctions

On considère des fonctions définies sur un domaine D inclus dans \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} .

1. Limite en un point

- Limite finie en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ($a \in D$ ou bien a est une extrémité de D). Exemples.

Cas des taux d'accroissements, exemple avec les limites usuelles des fonctions suivantes en 0 : $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{\tan x}{x}$.

Application à la limite en 0 de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Propriétés : unicité de la limite ; si f a une limite finie en a , elle est bornée au voisinage de a .

- Limites infinies, limites à droite, à gauche.
- Opération algébriques sur les limites, formes indéterminées usuelles.
- Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'existence de limite (finie ou infinie) par encadrement. Limites de fonctions monotones.

2. Continuité en un point

- Définition de la continuité en un point $a \in D$. Continuité à droite, à gauche. Exemple de la partie entière.
- Prolongement par continuité de f en un point a extrémité de D , n'appartenant pas à D , lorsque f admet une limite finie en a .
- Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point, composition de fonctions continues.

3. Fonctions continues sur un intervalle

- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas particulier : si f est continue et change de signe sur un intervalle I , alors f s'annule sur I .

Questions de cours envisageables

1. Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.
2. Convergence d'une suite géométrique complexe en fonction de sa raison.
3. Théorème des valeurs intermédiaires.