PCSI, Mathématiques, 2025-2026

Colle n^{o} 24, semaine du 07/04 au 11/04

Applications

X et Y désignent deux ensembles quelconques.

— Définition des applications injectives, surjectives, bijectives, exemples. Interprétation en terme d'antécédents. Caractérisation de la bijectivité par l'existence d'une bijection réciproque.

— La composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection). Formule pour la bijection réciproque d'une composée de deux bijections.

Applications linéaires

1. **Généralités**
   — Définitions des applications linéaires entre deux espaces vectoriels E et F , des endomorphismes de E, des isomorphismes. Notations $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$.
   Exemples, caractérisation de la linéarité par l'image d'une combinaison linéaire.
2. **Noyau et image d'une application linéaire de E dans F**
   — Définition, exemples. Ce sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.
   — Caractérisation de l'injectivité (resp. de la surjectivité) d'une application linéaire par le noyau (resp. l'image).
   — Si E est de dimension finie, l'image d'une famille génératrice finie par une application linéaire f est génératrice de $\mathsf{Im}(f)$.
3. **Opérations sur les applications linéaires**
   — Addition et multiplication par un scalaire : $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
   — Composition d'applications linéaires. Distributivité de la composition sur l'addition (à gauche et à droite).
   — Itérés d'un endomorphisme f : notation f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   — La bijection réciproque (resp. la composée) d'un (resp. de deux) isomorphisme(s) est un isomorphisme.
4. **Applications linéaires en dimension finie**
   — Rang d'une application linéaire entre E et F avec au moins E ou F de dimension finie. Lien avec le rang d'une famille de vecteurs lorsque E est de dimension finie. La rang diminue par composition, ne change pas si on compose par un isomorphisme.
   — Si E est de dimension finie. définition d'une application linéaire par l'image d'une base de E.
   — Si E et F sont de dimensions finies, il existe un isomorphisme de E dans F *si et seulement si* $\dim(E) = \dim(F)$.
   — Théorème du rang. Conséquence : il y a équivalence entre injectivité et surjectivité pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de mêmes dimensions.

Questions de cours envisageables

1. La composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection), formule pour la bijection réciproque d'une composée de deux bijections.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\ker(f)$ (resp. $\mathsf{Im}(f)$) est un sous-espace vectoriel de E (resp. de F).
3. Si E et F sont de dimensions finies, il existe un isomorphisme de E dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.