

Applications linéaires

1. Noyau et image d'une application linéaire de E dans F

- Caractérisation de l'injectivité (resp. de la surjectivité) d'une application linéaire par le noyau (resp. l'image).
- Si E est de dimension finie, l'image d'une famille génératrice finie par une application linéaire f est génératrice de $\text{Im}(f)$.

2. Opérations sur les applications linéaires

- Addition et multiplication par un scalaire : $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
- Composition d'applications linéaires. Distributivité de la composition sur l'addition (à gauche et à droite).
- Itérés d'un endomorphisme f : notation f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La bijection réciproque (resp. la composée) d'un (resp. de deux) isomorphisme(s) est un isomorphisme.

3. Applications linéaires en dimension finie

- Rang d'une application linéaire entre E et F avec au moins E ou F de dimension finie. Lien avec le rang d'une famille de vecteurs lorsque E est de dimension finie. Le rang diminue par composition, ne change pas si on compose par un isomorphisme.
- Définition d'une application linéaire par l'image d'une base de E si E est de dimension finie.
- Si E et F sont de dimensions finies, il existe un isomorphisme de E dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
- Théorème du rang. Conséquence : il y a équivalence entre injectivité et surjectivité pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de mêmes dimensions.

4. Endomorphismes remarquables d'un K -ev

- Identité, homothéties, automorphismes.
- Projections : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $p^2 = p$).
- Symétries : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $s^2 = Id_E$).

5. Equations linéaires non homogènes

Etude d'une équation linéaire générale $f(x) = y$ pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$ fixé. Structure de l'ensemble des solutions lorsqu'il est non vide.

6. Formes linéaires, hyperplans

Définition d'une forme linéaire, d'un hyperplan de E lorsque E est de dimension finie. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $H \oplus D = E$.

Questions de cours envisageables

1. Si E et F sont de dimensions finies, il existe un isomorphisme de E dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Propriétés d'une projection p (sur F_1 parallèlement à F_2) : $\ker(p) = F_2$, $\text{Im}(p) = F_1$ et $p^2 = p$.
3. Si H est un hyperplan de E (de dimension finie) et D une droite non contenue dans H , alors $H \oplus D = E$.