

Applications linéaires

1. Endomorphismes remarquables d'un K-ev

- Identité, homothéties, automorphismes.
- Projections : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $p^2 = p$).
- Symétries : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $s^2 = Id_E$).

2. Equations linéaires non homogènes

Etude d'une équation linéaire générale $f(x) = y$ pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$ fixé. Structure de l'ensemble des solutions lorsqu'il est non vide.

3. Formes linéaires, hyperplans

Définition d'une forme linéaire, d'un hyperplan de E lorsque E est de dimension finie. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $H \oplus D = E$.

Intégration

1. Fonctions en escalier

Définition d'une subdivision de $[a, b]$, d'une fonction en escalier sur $[a, b]$, puis de son intégrale sur $[a, b]$.

2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

- Principe de la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ à l'aide des fonctions en escalier. On admet les propriétés suivantes de cette intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Définition de la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a, b]$: si f est continue, cette valeur est atteinte par f sur $[a, b]$. Inégalité triangulaire pour les intégrales.
- Si f est continue et de signe constant sur $[a, b]$, et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f est nulle sur $[a, b]$.

3. Sommes de Riemann :

si f est continue sur $[a, b]$, $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$. Application à des calculs de limites de suites.

4. Calcul intégral

- Si f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .
- Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} (admise), qui implique la formule de Taylor-Young.

5. Extension aux fonctions à valeurs complexes

Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes : définition par les parties réelles et imaginaires, linéarité, relation de Chasles. L'inégalité triangulaire et celle de Taylor-Lagrange restent vraies avec des modules.

Questions de cours envisageables

1. Propriétés d'une projection p (sur F_1 parallèlement à F_2) : $\ker(p) = F_2$, $\text{Im}(p) = F_1$ et $p^2 = p$.
2. Si H est un hyperplan de E (de dimension finie) et D une droite non contenue dans H , alors $H \oplus D = E$.
3. Si f est continue sur $[a, b]$, elle atteint sa valeur moyenne sur $[a, b]$.