

## Séries numériques

### 1. Généralités

- Définition d'une série à termes réels ou complexes, des sommes partielles, de la convergence d'une série, des restes d'une série convergente. Cas des séries géométriques : CNS de convergence, calcul de la somme.
- Opérations sur les séries (multiplication par un scalaire et somme). Linéarité de la somme.
- Si la série  $\sum u_n$  converge, nécessairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . La réciproque est fautive.
- Séries télescopiques : définition, CNS de convergence et calcul de la somme en cas de convergence.

### 2. Séries à termes réels positifs

- Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : comparaisons par inégalités (à partir d'un certain rang), par négligeabilité ou par équivalence.
- Séries de Riemann : définition, convergence.

### 3. Séries absolument convergentes

Définition de la convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence, inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente. La réciproque est fautive : contre-exemples avec des séries alternées.

## Combinatoire

### 1. Définition et propriétés du cardinal

- Définition d'un ensemble fini, de son cardinal. Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces deux ensembles.
- Cardinaux du complémentaire d'une partie, d'une réunion de deux ensembles, d'une réunion de  $p$  ensembles finis disjoints deux à deux. Calcul du cardinal d'un ensemble  $E$  en passant par une partition.
- Cardinal du produit cartésien de  $p$  ensembles finis ( $p \geq 2$ ). Applications :  $\text{card}(\mathcal{A}(F, E)) = n^p$  si  $\text{card}(E) = n$  et  $\text{card}(F) = p$ ,  $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ .
- Si  $f$  est une application entre deux ensembles finis  $E$  et  $F$ ,  $\text{card } f(E) \leq \text{card } F$  (resp.  $\leq \text{card } E$ ) avec égalité si et seulement si  $f$  est surjective (resp. injective). Si  $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ ,  $f$  est injective  $\iff f$  est surjective.

### 2. Listes sans répétition et combinaisons d'un ensemble $E$ à $n$ éléments

- Nombre de  $p$ -listes sans répétition lorsque  $p \leq n$  (notation  $A_n^p$ ). Cas  $n = p$  : nombre de permutations de  $E$ .
- Nombre de parties à  $p$  éléments d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ , appelées aussi  $p$ -combinaisons de  $E$ .

## Probabilités

### 1. Univers, évènements, variables aléatoires

- Expérience aléatoire, issues de l'expérience. L'ensemble des issues est appelé univers. On se limite à des univers finis. Évènements, évènements élémentaires, incompatibles, système complet d'évènements.
- Définition d'une variable aléatoire finie  $X$  (définie sur un univers fini  $\Omega$ ), notations  $X(\Omega)$ ,  $\{X \in A\}$  pour  $A \subset \Omega$ .

### 2. Probabilités sur un univers fini

- Définition d'une probabilité  $P$  sur un univers fini  $\Omega$  :  $(\Omega, P)$  est alors appelé espace probabilisé fini. Exemples, dont la probabilité uniforme. Caractérisation d'une probabilité sur  $\Omega$  par la distribution de probabilités  $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ .
- Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux évènements, de l'évènement contraire, croissance.
- Définition de la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ , notée  $P_B(A)$ , pour  $B$  tel que  $P(B) > 0$ . L'application  $P_B$  est une probabilité sur  $\Omega$  (et aussi sur  $B$ ).
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
- Formule de Bayes simple, puis générale (pour un système complet d'évènements de probabilités non nulles).

### 3. Loi d'une variable aléatoire

- Définition de la loi de  $X$ , déterminée par la distribution de probabilités  $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ .
- Lois usuelles : Bernoulli, binomiale et uniforme sur un ensemble fini.

### 4. Indépendance d'évènements

- Couple  $(A, B)$  d'évènements indépendants. Si  $(A, B)$  sont indépendants, alors  $(A, \overline{B})$ ,  $(\overline{A}, B)$  et  $(\overline{A}, \overline{B})$  le sont aussi.
- Famille finie d'évènements  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  mutuellement indépendants. L'indépendance des  $A_i$  deux à deux n'implique pas leur indépendance mutuelle si  $n \geq 3$ .

## Questions de cours envisageables

1. Si  $\alpha > 1$ , la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente.
2. Si une série à termes réels converge absolument, alors elle converge.
3. Formule des probabilités composées.