PCSI, Mathématiques, 2025-2026

Colle n° 29 semaine du 01/06 au 06/06

Probabilités

1. **Univers, évènements, variables aléatoires**
   - Expérience aléatoire, issues de l'expérience. L'ensemble des issues est appelé univers. On se limite à des univers finis. Evènements, évènements élémentaires, incompatibles, système complet d'évènements.
   - Définition d'une variable aléatoire finie X (définie sur un univers fini Ω), notations $X(\Omega)$, $\{X \in A\}$ pour $A \subset \Omega$.
2. **Probabilités sur un univers fini**
   - Définition d'une probabilité P sur un univers fini Ω : (Ω, P) est alors appelé espace probabilisé fini. Exemples, dont la probabilité uniforme. Caractérisation d'une probabilité sur Ω par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
   - Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux évènements, de l'évènement contraire, croissance.
   - Définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P_B(A)$, pour B tel que $P(B) > 0$. L'application P_B est une probabilité sur Ω (et aussi sur B).
   - Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
   - Formule de Bayes simple, puis générale (pour un système complet d'évènements de probabilités non nulles).
3. **Loi d'une variable aléatoire**
   - Définition de la loi de X, déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.
   - Lois usuelles : Bernoulli, binomiale et uniforme sur un ensemble fini.
4. **Indépendance d'évènements**
   - Couple (A, B) d'évènements indépendants. Si (A, B) sont indépendants, alors $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ le sont aussi.
   - Famille finie d'évènements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ mutuellement indépendants. L'indépendance des A_i deux à deux n'implique pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.
5. **Couple de variables aléatoires**
   - Couple (X, Y) de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales. Variables indépendantes.
   - Indépendance mutuelle d'une famille finie de variables aléatoires. Lemme des coalitions : si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \cdots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \cdots, X_n)$ sont indépendantes (admis).
6. **Espérance et variance**
   - Espérance d'une variable aléatoire réelle (ou complexe) : définition, propriétés, calcul pour la loi binomiale.
   - Théorème de transfert pour le calcul de $E(f(X))$ ou de $E(g(X, Y))$ (preuves admises). Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
   - Définition de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire réelle X, de son écart type. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Calcul de la variance pour la loi binomiale, $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Questions de cours envisageables

1. Formule des probabilités composées.
2. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.
3. Espérance d'une variable de loi binomiale.