PCSI, Mathématiques, 2025-2026

Colle n° 30 semaine du 08/06 au 13/06

Probabilités

1. **Couple de variables aléatoires**
   - Couple (X, Y) de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales. Variables indépendantes.
   - Indépendance mutuelle d'une famille finie de variables aléatoires. Lemme des coalitions : si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \cdots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \cdots, X_n)$ sont indépendantes (admis).
2. **Espérance et variance**
   - Espérance d'une variable aléatoire réelle (ou complexe) : définition, propriétés, calcul pour la loi binomiale.
   - Théorème de transfert pour le calcul de $E(f(X))$ ou de $E(g(X, Y))$ (preuves admises). Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
   - Définition de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire réelle X, de son écart type. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Calcul de la variance pour la loi binomiale, $V(aX + b) = a^2V(X)$. Définition de la covariance de deux variables aléatoires. Variance de la somme de deux variables aléatoires.
   - Inégalité de Markov pour une variable aléatoire positive, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Matrices

Dans tout ce qui suit, E (resp. F) désigne un $K-$espace vectoriel de dimension p (resp. n), muni d'une base $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$).

1. **Matrices et applications linéaires**
   - Matrice d'un vecteur x de F dans la base $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F}}(x)$ (qui appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(K)$). Matrice d'une famille finie $\mathcal{B}$ de p vecteurs de F dans la base $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ (qui appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(K)$).
   - Matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$. $f \mapsto M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.
   - Expression matricielle de f : si $x \in E$ a pour matrice X dans $\mathcal{E}$, alors $f(x)$ a pour matrice AX dans $\mathcal{F}$, en notant $A = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$. Matrice de la composée de deux applications linéaires.
   - Si $n = p$, f est un isomorphisme si et seulement si $M = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f^{-1}) = M^{-1}$.
   - Matrice d'un endomorphisme de E dans une base $\mathcal{E}$: on note $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}(f)$.
2. **Noyau, image et rang d'une matrice**
   - Le noyau, l'image et le rang d'une matrice sont le noyau, l'image et le rang de l'application linéaire canoniquement associée.
   - Théorème du rang, caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang. Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible. Les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) conservent le noyau (resp. l'image). En particulier toutes les opérations élémentaires conservent le rang.

Questions de cours envisageables

1. Espérance d'une variable de loi binomiale.
2. Inégalité de Markov.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, f est un isomorphisme si et seulement si $M = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f^{-1}) = M^{-1}$.