Colle n° 12, semaine du 18/12 au 23/12

Continuité des fonctions

1. **Fonctions continues sur un intervalle**
   — Image d'un segment par une fonction continue (admis).
   — Théorème de la bijection continue : toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, dont la rést continue et de même sens de variation (admis).
2. **Extension aux fonctions à valeurs complexes**
   Extension des notions de limites, continuité, fonctions bornées, etc. aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation d'une limite ou de la continuité à l'aide des parties réelles et imaginaires.

Dérivation

1. **Dérivabilité en un point**
   Rappels sur dérivabilité en un point, l'équation de la tangente au graphe. La dérivabilité implique la continuité. Dérivée à droite et à gauche en un point. Développement limité d'ordre 1 en un point.
2. **Opérations sur les dérivées**
   Rappel sur les opérations : somme, produit, quotient et composition de fonctions dérivables, fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable (formules admises).
3. **Fonctions dérivables sur un intervalle**
   — Extremum local en un point x_0 d'une fonction f dérivable sur un intervalle I : condition nécessaire sur $f'(x_0)$ si x_0 n'est pas une extrémité de I.
   — Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, et inégalité des accroissements finis : si $|f'| \leqslant M$ sur un intervalle I, f est M-lipschitzienne sur I.
   — Applications des accroissements finis : caractérisation de la monotonie sur un intervalle par le signe de la dérivée, théorème de la limite d'une dérivée : si f est continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et que f' admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet la limite ℓ en a ; en particulier f est dérivable en a si ℓ est finie, avec $f'(a) = \ell$.
4. **Dérivées d'ordre supérieur**
   Fonctions de classe $\mathcal{D}^n$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$. Calcul des dérivées n-ièmes pour les exemples suivants : fonctions puissances, $\cos, \sin, \exp, \ln$. Opérations sur les dérivées d'ordre supérieur, formule de Leibniz pour la dérivée n-ième d'un produit. et application aux dérivées successives d'une composée et d'un quotient (admis).
5. **Fonctions convexes**
   — Définition d'une fonction convexe ou concave sur un intervalle. Exemples.
   — Caractérisation pour les fonctions dérivables : si f' est croissante sur I, alors f est convexe (réciproque admise). Utilisation du signe de f'' pour les fonctions deux fois dérivables.
   Si f est convexe et dérivable, la courbe de f est au dessus de ses tangentes.
6. **Fonctions dérivables à valeurs complexes**
   Les théorème de Rolle et des accroissements finis ne sont plus vrais, l'inégalité des accroissements finis reste vraie (avec des modules).

Questions de cours envisageables

1. Théorème de Rolle.
2. Théorème de la limite d'une dérivée.
3. Si f est dérivable sur un intervalle I et que f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.