Colle n° 15, semaine du 22/01 au 27/01

Matrices

- Matrices carrées inversibles. On admet que A inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $AB = I_n$. Exemples, inversibilité des matrices élémentaires. Inverse d'un produit de deux matrices inversibles, inverse de la transposée d'une matrice inversible.
  A est inversible si et seulement si le système $AX = B$ admet une unique solution pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. Application pratique au calcul de l'inverse par résolution d'un système.
- Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires. Cas des matrices diagonales : expression de l'inverse.

Polynômes

1. **Définitions et opérations**
   - Définition de $K[X]$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), du degré, du coefficient dominant pour $P \neq 0$. Polynômes unitaires. Fonction polynômiale associée à un polynôme.
   - Addition et multiplication de deux polynômes : définitions, propriétés. Le degré d'une somme est inférieur ou égal au maximum des deux degrés (avec égalité si les degrés sont différents) celui d'un produit égal à la somme des degrés, et le coefficient dominant du produit (s'il est non nul) est égal au produit des 2 coefficients dominants.
   - Composition de deux polynômes.
2. **Divisibilité et division euclidienne**
   Diviseurs et multiples dans $K[X]$. Division euclidienne dans $K[X]$ (existence admise). Méthode pratique de la division, exemples. Cas d'une division par un polynôme de degré 1.
3. **Dérivation**
   Dérivée d'un polynôme, dérivée d'une somme et d'un produit. Dérivées successives.
   Expression des coefficients à l'aide des dérivées en 0. Formule de Taylor en un point $\alpha \in K$.
4. **Racines**
   - $\alpha \in K$ est une racine d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$. C'est équivalent à $X - \alpha$ divise P. Un polynôme de degré $n \geqslant 0$ (donc non nul) admet au plus n racines distinctes.
   - Racines multiples : définition de la multiplicité d'une racine α de P (plus grand entier m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P). Caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées successives.
   - Polynôme scindé sur K. Relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé : expressions de la somme et du produit des racines (comptées avec leurs multiplicités).
5. **Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$**
   - Polynômes irréductibles dans $K[X]$: définition, exemples. Tout polynôme de degré un est irréductible (dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$).
   - Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe (preuve hors-programme).
     Conséquences : tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé, et un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est irréductible si et seulement s'il est de degré 1.
   - Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, α est racine de P de multiplicité m *si et seulement si* $\overline{\alpha}$ est racine de P de multiplicité m.
     Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est irréductible si et seulement s'il est de degré un ou bien de degré deux avec un discriminant strictement négatif. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant se décompose en produit de polynômes irréductibles.

Questions de cours envisageables

1. Degré et coefficient dominant (s'il est non nul) d'un produit de deux polynômes.
2. Division euclidienne dans $K[X]$, preuve de l'unicité.
3. Si $\forall 0 \leqslant k \leqslant m-1,\ P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$, alors α est racine de multiplicité m de P.