PCSI, Mathématiques, 2023-2024

Colle n° 16, semaine du 29/01 au 03/02

Polynômes

1. **Dérivation**
   Dérivée d'un polynôme, dérivée d'une somme et d'un produit. Dérivées successives.
   Expression des coefficients à l'aide des dérivées en 0. Formule de Taylor en un point $\alpha \in K$.
2. **Racines**
   — $\alpha \in K$ est une racine d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$. C'est équivalent à $X - \alpha$ divise P. Un polynôme de degré $n \geqslant 0$ (donc non nul) admet au plus n racines distinctes.
   — Racines multiples : définition de la multiplicité d'une racine α de P (plus grand entier m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P). Caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées successives.
   — Polynôme scindé sur K. Relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé : expressions de la somme et du produit des racines (comptées avec leurs multiplicités).
3. **Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$**
   — Polynômes irréductibles dans $K[X]$: définition, exemples. Tout polynôme de degré un est irréductible (dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$).
   — Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe (preuve hors-programme).
   Conséquences : tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé, et un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est irréductible si et seulement s'il est de degré 1.
   — Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, α est racine de P de multiplicité *m si et seulement si* $\overline{\alpha}$ est racine de P de multiplicité m.
   Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est irréductible si et seulement s'il est de degré un ou bien de degré deux avec un discriminant strictement négatif. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant se décompose en produit de polynômes irréductibles.
   Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine réelle.
4. **Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles**
   — Vocabulaire : fractions et fonctions rationnelles, fractions irréductibles, pôles.
   — Expression de la décomposition en éléments simples pour une fraction rationnelles à pôles simples (preuve hors-programme). Méthode pour trouver les coefficients dans la décomposition. Application aux calculs de primitives.

Ensembles

1. Appartenance, inclusion, ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E. Egalité entre deux ensembles, exemples de raisonnement par double inclusion.
2. Opérations sur les ensembles : définitions et propriétés de la réunion et de l'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles. Distributivité de la réunion sur l'intersection et réciproquement. Complémentaire d'une partie dans un ensemble.