PCSI, Mathématiques, 2023-2024

Colle n° 17, semaine du 05/02 au 10/02

Polynômes : décomposition en éléments simples de fractions rationnelles

- Vocabulaire : fractions et fonctions rationnelles, fractions irréductibles, pôles.
- Expression de la décomposition en éléments simples pour une fraction rationnelle irréductible à pôles simples (preuve hors-programme). Méthode pour trouver les coefficients dans la décomposition. Application aux calculs de primitives.

Ensembles

1. Appartenance, inclusion, ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E. Egalité entre deux ensembles, exemples de raisonnement par double inclusion.
2. Opérations sur les ensembles : définitions et propriétés de la réunion et de l'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles. Distributivité de la réunion sur l'intersection et réciproquement. Complémentaire d'une partie dans un ensemble, produit cartésien de deux ou plusieurs ensembles.

Analyse asymptotique

1. **Relations de comparaison entre fonctions au voisinage d'un point a**
   - Relation de domination, relation de négligeabilité : définitions, notations o et O, lien entre les deux relations, règles de calculs.
     Relations de négligeabilité usuelles en $+\infty$ et en 0 : comparaison des fonctions puissance, croissances comparées.
   - Fonctions équivalentes au voisinage de a : définition, exemples, propriétés. Equivalents usuels au voisinage de 0.
     Liens entre équivalence et négligeabilité :
     $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
     Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
2. **Relations de comparaison entre suites réelles**
   Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence entre suites.
   $x^n = o(y^n) \Longleftrightarrow |x| < |y|$; pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout q tel que $|q| > 1$, $n^\alpha = o(q^n)$.
3. **Développements limités**
   On abrège développement limité en DL.
   - Définition : DL à l'ordre n au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ ou de $\pm\infty$. Lien avec la limite et la dérivabilité (lorsque $a \in \mathbb{R}$) pour les DL d'ordre 0 et 1.
   - Unicité du DL, application au DL des fonctions paires ou impaires en 0.
   - Intégration terme à terme du DL d'une dérivée (admis).
   - Obtention d'un DL d'ordre n par la formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (formule admise).