Colle n° 20, semaine du 11/03 au 16/03

Espaces vectoriels

1. **Structure de K-espace vectoriel (K-ev), avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**
   — Définition d'un K-espace vectoriel, exemples de référence. Règles de calcul.
   — Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs : définition, exemples.
2. **Sous-espaces vectoriels (ssev)**
   — Définition, caractérisation, exemples.
   — L'intersection de deux ssev est un ssev.
   — Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie $\mathcal{F} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de vecteurs : $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $e_1, \cdots, e_n$, c'est le plus petit ssev contenant $\mathcal{F}$.
   Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, alors $\mathsf{vect}(\mathcal{F}_1) \subset \mathsf{vect}(\mathcal{F}_2)$.
   $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n) = \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}) \iff e_{n+1} \in \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
3. **Familles de vecteurs**
   — Famille génératrice, famille génératrice d'un ssev : définitions, exemples.
   — Famille liée, libre : définitions, cas d'une famille de deux vecteurs. Exemples dans K^n : lien avec la résolution d'un système homogène à n équations et p inconnues (nombre de vecteurs de la famille). Si $p \geqslant n+1$, toute famille de p vecteurs de K^n est liée (admis).
   Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux familles telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, alors $\mathcal{F}$ liée $\Rightarrow \mathcal{F}'$ liée (et donc $\mathcal{F}'$ libre $\Rightarrow \mathcal{F}$ libre).
   — Une famille est liée *si et seulement si* au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
   Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, $(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1})$ est libre *si et seulement si* $e_{n+1} \notin \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
   Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
   — Base : définition (famille libre et génératrice), caractérisation (tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille).
   Bases canoniques de K^n, $K_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.
4. **Sommes de deux ssev**
   — Définition de la somme de deux ssev F_1 et F_2 (ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$).
   $F_1 + F_2$ est le plus petit ssev contenant F_1 et F_2.
   Somme directe (intersection réduite à 0_E), notation $F_1 \oplus F_2$, caractérisation par l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$ pour tout vecteur x de $F_1 + F_2$.
   — Ssev supplémentaires : deux ssev F_1 et F_2 de E sont dits supplémentaires si $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
   $F_1 \oplus F_2 = E$ *si et seulement si* tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Exemples.
   — Liens entre sommes de ssev et bases : base adaptée à une somme directe, si $(e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$ est libre (resp. une base), alors $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_k)$ et $\mathsf{vect}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$ sont en somme directe (resp. supplémentaires).

Questions de cours envisageables

1. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, $(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1})$ est libre *si et seulement si* $e_{n+1} \notin \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
2. Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
3. $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F_1 et F_2.