Colle n° 21, semaine du 18/03 au 23/03

Espaces vectoriels

1. **Familles de vecteurs**
   - Une famille est liée *si et seulement si* au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
     Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, $(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1})$ est libre *si et seulement si* $e_{n+1} \notin \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
     Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
   - Base : définition (famille libre et génératrice), caractérisation (tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille).
     Bases canoniques de K^n, $K_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.
2. **Sommes de deux ssev**
   - Définition de la somme de deux ssev F_1 et F_2 (ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$).
     $F_1 + F_2$ est le plus petit ssev contenant F_1 et F_2.
     Somme directe (intersection réduite à 0_E), notation $F_1 \oplus F_2$, caractérisation par l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$ pour tout vecteur x de $F_1 + F_2$.
   - Ssev supplémentaires : deux ssev F_1 et F_2 de E sont dits supplémentaires si $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
     $F_1 \oplus F_2 = E$ *si et seulement si* tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Exemples.
   - Liens entre sommes de ssev et bases : base adaptée à une somme directe, si $(e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$ est libre (resp. une base), alors $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_k)$ et $\mathsf{vect}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$ sont en somme directe (resp. supplémentaires).

Espaces vectoriels de dimension finie

1. **Définition de la dimension, propriétés**
   - Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples. De toute famille génératrice finie on peut extraire une base (admis), théorème de la base incomplète. Si E admet une famille génératrice de cardinal p, toute famille d'au moins $p + 1$ vecteurs est liée (admis). Corollaire : toutes les bases ont le même cardinal. La dimension est le cardinal commun de toutes les bases. Exemples.
   - Si E est de dimension finie n, toute famille libre (resp. génératrice) a au plus n vecteurs (resp. au moins n vecteurs) ; une famille libre (resp. génératrice) de n vecteurs est une base.
2. **Dimension des sous-espaces vectoriels**
   - Si E est un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$ (admis).
   - Rang d'une famille de p vecteurs de E. Si E est de dimension finie n, le rang est toujours inférieur à n (resp. p) avec égalité *si et seulement si* la famille est génératrice (resp. libre). Lorsque E est de dimension finie, lien avec la résolution d'un système.
   - Si E est de dimension finie, tout sous-espace F de E admet un supplémentaire. Dimension de la somme de deux sous-espaces en somme directe, application à la dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann pour la somme de deux sous-espaces quelconques (admise). Caractérisations du fait que deux sous-espaces sont supplémentaires à l'aide des dimensions.

Questions de cours envisageables

1. Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
2. Si $\dim(E) = n$, le rang d'une famille de p vecteurs de E est inférieur à n (resp. p), avec égalité *si et seulement si* la famille est génératrice (resp. libre).
3. Si E est de dimension finie n et F, G sont deux ssev de E, alors :
   $F \oplus G = E \iff (F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim F + \dim G = n) \iff (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = n)$.