Colle n° 22, semaine du 25/03 au 30/03

Espaces vectoriels de dimension finie

1. **Définition de la dimension, propriétés**
   - Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples. De toute famille génératrice finie on peut extraire une base (admis), théorème de la base incomplète. Si E admet une famille génératrice de cardinal p, toute famille d'au moins $p+1$ vecteurs est liée (admis). Corollaire : toutes les bases ont le même cardinal. La dimension est le cardinal commun de toutes les bases. Exemples.
   - Si E est de dimension finie n, toute famille libre (resp. génératrice) a au plus n vecteurs (resp. au moins n vecteurs) ; une famille libre (resp. génératrice) de n vecteurs est une base.
2. **Dimension des sous-espaces vectoriels**
   - Si E est un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$ (admis).
   - Rang d'une famille de p vecteurs de E. Si E est de dimension finie n, le rang est toujours inférieur à n (resp. p) avec égalité *si et seulement si* la famille est génératrice (resp. libre). Lorsque E est de dimension finie, lien avec la résolution d'un système.
   - Si E est de dimension finie, tout sous-espace F de E admet un supplémentaire. Dimension de la somme de deux sous-espaces en somme directe, application à la dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann pour la somme de deux sous-espaces quelconques (admise). Caractérisations du fait que deux sous-espaces sont supplémentaires à l'aide des dimensions.

Applications

- Définition d'une application de X dans Y. Notations $\mathcal{A}(X,Y)$, $\mathcal{F}(X,Y)$ ou Y^X.
- Fonction indicatrice d'un sous-ensemble A d'un ensemble E. Formules pour la fonction indicatrice du complémentaire, d'une intersection, d'une réunion.
- Pour $f \in \mathcal{A}(X,Y)$, définition de l'image directe d'une partie A de X, notée $f(A)$, et de l'image réciproque d'une partie B de Y, notée $f^{-1}(B)$.
- Composée de deux applications, associativité de la composition. Restriction, prolongement d'une application.
- Définition des applications injectives, surjectives, bijectives, exemples. Interprétation en terme d'antécédents. Caractérisation de la bijectivité par l'existence d'une bijection réciproque.
  La composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection). Formule pour la bijection réciproque d'une composée de deux bijections.

Questions de cours envisageables

1. Si $\dim(E) = n$, le rang d'une famille de p vecteurs de E est inférieur à n (resp. p), avec égalité *si et seulement si* la famille est génératrice (resp. libre).
2. Si E est de dimension finie n et F, G sont deux ssev de E, alors :
   $F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = n \iff F + G = E$ et $\dim F + \dim G = n$.
3. La composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).