Colle n° 24, semaine du 08/04 au 13/04

Applications linéaires

1. **Généralités**
   — Définitions des applications linéaires entre deux espaces vectoriels E et F , des endomorphismes de E, des isomorphismes. Notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$.
   Exemples, caractérisation de la linéarité par l'image d'une combinaison linéaire.
2. **Noyau et image d'une application linéaire de E dans F**
   — Définition, exemples. Ce sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.
   — Caractérisation de l'injectivité (resp. de la surjectivité) d'une application linéaire par le noyau (resp. l'image).
   — Si E est de dimension finie, l'image d'une famille génératrice finie par une application linéaire f est génératrice de $\mathsf{Im}(f)$.
3. **Opérations sur les applications linéaires**
   — Addition et multiplication par un scalaire : $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
   — Composition d'applications linéaires. Distributivité de la composition sur l'addition (à gauche et à droite).
   — Itérés d'un endomorphisme f : notation f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   — La bijection réciproque (resp. la composée) d'un (resp. de deux) isomorphisme(s) est un isomorphisme.
4. **Applications linéaires en dimension finie**
   — Rang d'une application linéaire entre E et F avec au moins E ou F de dimension finie. Lien avec le rang d'une famille de vecteurs lorsque E est de dimension finie. La rang diminue par composition, ne change pas si on compose par un isomorphisme.
   — Définition d'une application linéaire par l'image d'une base de E si E est de dimension finie.
   — Si E et F sont de dimensions finies, il existe un isomorphisme de E dans F *si et seulement si* $\dim(E) = \dim(F)$.
   — Théorème du rang. Conséquence : il y a équivalence entre injectivité et surjectivité pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de mêmes dimensions.
5. **Endomorphismes remarquables d'un K-ev**
   — Identité, homothéties, automorphismes.
   — Projections : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $p^2 = p$).
   — Symétries : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $s^2 = Id_E$).
6. **Equations linéaires non homogènes**
   Etude d'une équation linéaire générale $f(x) = y$ pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$ fixé. Structure de l'ensemble des solutions lorsqu'il est non vide.
7. **Formes linéaires, hyperplans**
   Définition d'une forme linéaire, d'un hyperplan de E lorsque E est de dimension finie. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $H \oplus D = E$.

Questions de cours envisageables

1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\ker(f)$ (resp. $\mathsf{Im}(f)$) est un sous-espace vectoriel de E (resp. de F).
2. Si E et F sont de dimensions finies, il existe un isomorphisme de E dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
3. Proriétés d'une projection p (sur F_1 parallèlement à F_2) : $\ker(p) = F_2$, $\mathsf{Im}(p) = F_1$ et $p^2 = p$.