PCSI, Mathématiques, 2023-2024

Colle n° 26, semaine du 15/04 au 20/04

Applications linéaires

1. **Endomorphismes remarquables d'un K-ev**
   — Identité, homothéties, automorphismes.
   — Projections : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $p^2 = p$).
   — Symétries : définition, propriétés, caractérisation (endomorphismes tels que $s^2 = Id_E$).
2. **Equations linéaires non homogènes**
   Etude d'une équation linéaire générale $f(x) = y$ pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$ fixé. Structure de l'ensemble des solutions lorsqu'il est non vide.
3. **Formes linéaires, hyperplans**
   Définition d'une forme linéaire, d'un hyperplan de E lorsque E est de dimension finie. Si H est un hyperplan et E et D une droite non contenue dans H, alors $H \oplus D = E$.

Intégration

1. **Fonctions en escalier**
   Définition d'une subdivision de $[a, b]$, d'une fonction en escalier sur $[a, b]$, puis de son intégrale sur $[a, b]$.
2. **Intégrale d'une fonction continue sur un segment**
   — Principe de la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ à l'aide des fonctions en escalier. On admet les propriétés suivantes de cette intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
   — Définition de la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a, b]$: si f est continue, cette valeur est atteinte par f sur $[a, b]$. Inégalité triangulaire pour les intégrales.
   — Si f est continue et de signe constant sur $[a, b]$, et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
3. **Sommes de Riemann** :
   si f est continue sur $[a, b]$, $\displaystyle \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\, dt$; preuve dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Application à des calculs de limites de suites.
4. **Calcul intégral**
   — Si f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$, $\displaystyle x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
   — Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (admise), qui implique la formule de Taylor-Young.

Questions de cours envisageables

1. Proriétés d'une projection p (sur F_1 parallèlement à F_2) : $\ker(p) = F_2$, $\mathsf{Im}(p) = F_1$ et $p^2 = p$.
2. Si f est continue sur $[a, b]$, la valeur moyenne de f est atteinte sur $[a, b]$.
3. Si f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.